

Remarque

Certains exercices consistent en des questions de type Vrai ou Faux (V/F). Pour chaque question, répondre VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

Exercice 1.

🕒 **Objectif:** Utilisation théorique du TVI

Soient $a < b$ et $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty.$$

Montrer que f est surjective.

Exercice 2.

🕒 **Objectif:** Changement de variable dans les limites

La limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{\frac{2}{x^2}} \left(\cos \left(e^{-\frac{1}{x^2}} \right) - 1 \right) \right)$$

est égale à

0

e^2

$+\infty$

$-\frac{1}{2}$

Exercice 3.

🕒 **Objectif:** Application du TAF à l'étude de fonction

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b] \subset D(f)$ (avec $a < b$) et dérivable sur $]a, b[$.

Vrai ou Faux ?

Q1 : Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est croissante sur $[a, b]$.

Q2 : Si f est croissante sur $[a, b]$, alors $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

Q3 : Si f est strictement croissante sur $[a, b]$, alors $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

Q4 : Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est strictement croissante sur $[a, b]$.

Q5 : Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \ell$ existe, alors f est dérivable à droite en a et la dérivée à droite est $f'_d(a) = \ell$.

Exercice 4.

🕒 **Objectif:** Règle de Bernoulli-l'Hospital

Calculer les limites suivantes :

$$(i) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log(x-1)}{x-2} \quad (ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\tanh(x)-1) \quad (iii) \lim_{x \rightarrow 0} (1+\sin(x))^{1/x}$$

Exercice 5.

🎯 Objectif: Utilisation de BH pour les suites

📖 Théorie nécessaire: BH, caractérisation des limites de fonctions par les suites et exercice à rendre série 10

Pour $(x_n)_{n \geq 1}$ les suites définies ci-dessous, calculer leur limite $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

$$(i) x_n = n(e^{1/n} - 1) \quad (ii) x_n = \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n, t \in \mathbb{R} \quad (iii) x_n = n^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Exercice 6.

Soit $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur \mathbb{R} avec $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Vrai ou Faux ?

Q1 : Si $f(a) = g(a) = 0$ pour $a \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Q2 : Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'existe pas, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ n'existe pas.

Q3 : S'il existent $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ tels que $f(y) - f(x) = g(y) - g(x)$, alors il existe $c \in]x, y[$ tel que $f'(c) = g'(c)$.

Q4 : Soit $a \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(g(x))}{g(x)}$ existe.

Q5 : Soit $a \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sinh(g(x))}{g(x)} = \cosh(g(a))$.

Exercice 7.

🎯 Objectif: Etablir un nouveau critère de convergence pour les séries

📖 Théorie nécessaire: BH et corollaire du critère de comparaison pour les séries

Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction.

(i) Montrer à l'aide de la règle de Bernoulli-l'Hospital que si f est deux fois dérivable et $f(0) = f'(0) = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{f''(0)}{2}.$$

Déduire du corollaire du critère de comparaison que la série suivante converge :

$$\sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{k}\right).$$

(ii) Montrer que si f est dérivable et $f(0) \neq 0$ ou $f'(0) \neq 0$, la série suivante diverge :

$$\sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{k}\right).$$

Indication : Distinguer les deux cas suivantes :

- Si $f(0) \neq 0$, utiliser la condition nécessaire pour la convergence de séries.
- Si $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$, montrer à l'aide de la règle de Bernoulli-l'Hospital que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0),$$

et utiliser le corollaire du critère de comparaison.

(iii) En utilisant les points précédents, déterminer, parmi les séries suivantes, celles qui convergent et celles qui divergent :

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

$$(b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$(c) \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$(d) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{k}\right)}{k}$$

$$(e) \sum_{k=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$(f) \sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$(g) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{k}\right) - 1\right)$$

$$(h) \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{k}} - 1\right)$$

$$(i) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ke^{\frac{1}{k}} - k - 1}{k}$$

$$(j) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sinh\left(\frac{1}{k}\right) - \frac{\cosh\left(\frac{1}{k}\right)}{k}\right)$$

(iv) La série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3}}$$

converge-t-elle ? Peut-on appliquer un raisonnement similaire à ci-dessus pour cette série ?

Exercice 8.

Objectif : Min/max locaux dans le cas où la fonction n'est pas dérivable en un point

Soit $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

(i) Montrer que, si $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in]a, a + \delta[$, $f'(x) \geq 0$, alors f a un minimum local en a .

(ii) Montrer que, si $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in]b - \delta, b[$, $f'(x) \leq 0$, alors f a un maximum local en b .

Remarque : On peut également montrer que :

- Si $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in]a, a + \delta[$, $f'(x) \leq 0$, alors f a un maximum local en a .
- Si $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in]b - \delta, b[$, $f'(x) \geq 0$, alors f a un minimum local en b .

(iii) Trouver tous les extréma locaux de $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = xe^{-x}(x-1)^2$.

Exercice 9.

Trouver les extremums locaux des fonctions f suivantes, ainsi que le maximum et le minimum dans l'intervalle donné :

$$(i) f(x) = x^2 - \left|x + \frac{1}{4}\right| + 1 \text{ sur } [-1, 1]$$

$$(ii) f(x) = (x-1)^2 - 2|2-x| \text{ sur }]2, 3[$$

Exercice 10.

Note : cet exercice est tiré du livre "Mathematics for the Life Sciences" (Bodine, Lenhart et Gross).

Durant une épidémie, le nombre de personnes infectées $f(t)$ peut être modélisé par

$$f(t) = \frac{a \log(bt+1)}{bt+1},$$

où le temps t est quantifié en jours depuis le déclenchement initial de l'épidémie, et $a, b > 0$ sont des paramètres (constantes) du modèle.

i) Calculer $f(0)$ et $f'(0)$ et donner une interprétation.

- ii*) A partir de quel moment (exprimé en temps) le nombre de personnes infectées commence à diminuer ?
- iii*) Supposons qu'un traitement est donné aux personnes infectées. L'ajout de ce traitement peut se traduire dans la modélisation par une augmentation de la valeur que prend le paramètre b . Quel effet cela a sur le pic épidémique ? En déduire l'influence du traitement sur la contamination de la population.

Solution des exercices calculatoires et auto-évaluation

Exercice 1 $-\frac{1}{2}$

Exercice 3 (i) 1
(ii) 0
(iii) e

Exercice 4 (i) 1
(ii) e^t
(iii) $\frac{1}{2}$

Exercice 8 (i) $f(0) = 0, f'(0) = ab$
(ii) à partir de $t = \frac{e-1}{b}$