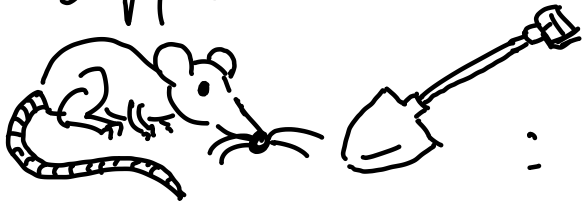
Infos : ◇ Cours vidéo 1/4

◇ Support sur le forum a commencé ◇ Séances du soir → semaine pro

◇ Difficulté à l'EPFL : Quelle que soit votre expérience, c'est OK !!

 : 3 phases du travail en maths :

exemple : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Discuter inj. & surj

① Détermination du résultat

$f(x) = y$

$x^2 = y$

$\downarrow y \geq 0$

$|x| = \sqrt{y}$

$x \in \mathbb{R}_+ \downarrow$

$x = \sqrt{y}$

hypothèse nécessaire sur y → pas surjective

solution unique → injective

Pas besoin d'être rigoureux

② Recherche de Preuve

→ ¬ surjective

Posons $y = -1$

③ Preuve

- Respecter la grammaire math.
- utiliser les formules de politesse

($\forall x \in X$ ⇝ soit $x \in X$ qcque

$\exists x \in X$ tq ⇝ posons $x = \ldots$)

Rigueur !!

Chapitre 1 Les nombres réels

§1.1 Rappels

Définition 1.1 Les réels $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ est la droite réele. On peut la voir comme l'ensemble des nombres à virgule

$$x = a, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$$

où $a \in \mathbb{Z}$ et pour $k \geq 1$ $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Par convention

$$x = a, a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k 9999 = a, a_1 a_2 \ldots a_{k-1} (a_k + 1) 0000$$

$\hookrightarrow$ $0,\overline{9} = 1$

$\frac{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} = 1$

$\frac{1}{3} \cdot 3 = 0,\overline{3} \cdot 3 = 0,\overline{9}$

$\hookrightarrow$ $|0,\overline{9} - 1| = 0 \Rightarrow 0,\overline{9} - 1 = 0 \Rightarrow 0,\overline{9} = 1$

Définition 1.2 Valeur absolue

La valeur absolue est une fonction $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Proposition 1.3

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$, on a

(i) $x \leq |x|$

(ii) $|x| \leq c \iff -c \leq x \leq c$

(iii) $|x| = 0 \iff x = 0$

(iv) $|-x| = |x|$

(v) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(vi) $|x \pm y| \leq |x| + |y|$ Inégalité du triangle

(vii) $|x \pm y| \geq \big| |x| - |y| \big|$ Inégalité du triangle inverse

Définition 1.4 Intervalle

Un *intervalle* est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ayant la forme

$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

$]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$

$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

$]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$

$]a,a[= \emptyset$

Intervalles ouverts

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

$[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$

$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$

Intervalles fermés

$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

$]-1,2[\cup]4,58[$ n'est pas un intervalle

⚠ $\mathbb{R}, \emptyset$ sont ouverts et fermé

et $[a,b[$ et $]a,b]$ sont ni ouverts ni fermés

→ ¬fermé ≠ ouvert

⚠ Une union d'intervalles n'est pas nécessairement un intervalle

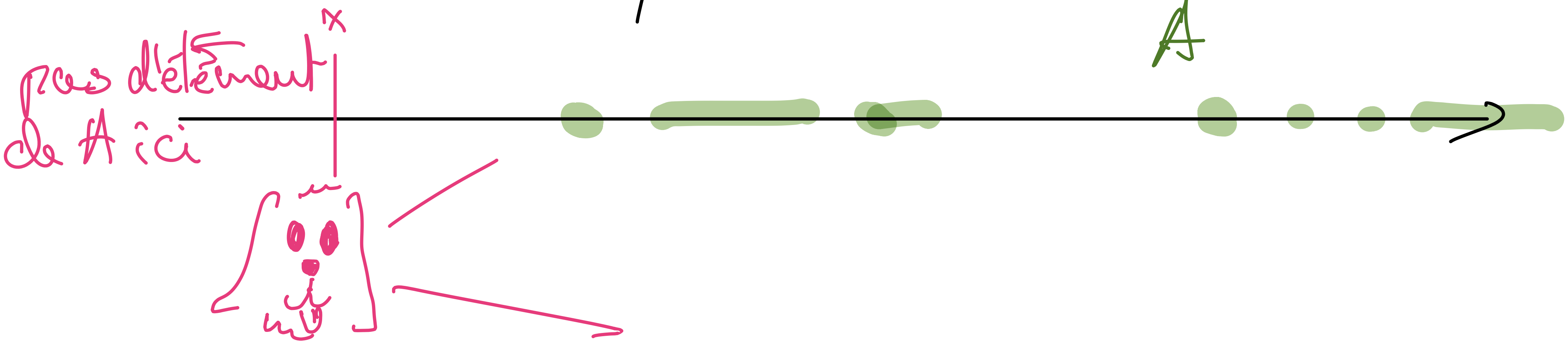
§ 1.2 Suprémum, infimum, maximum, minimum

Définition 1.5 (minoré, minorant, majoré, majorant)

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble non-vide

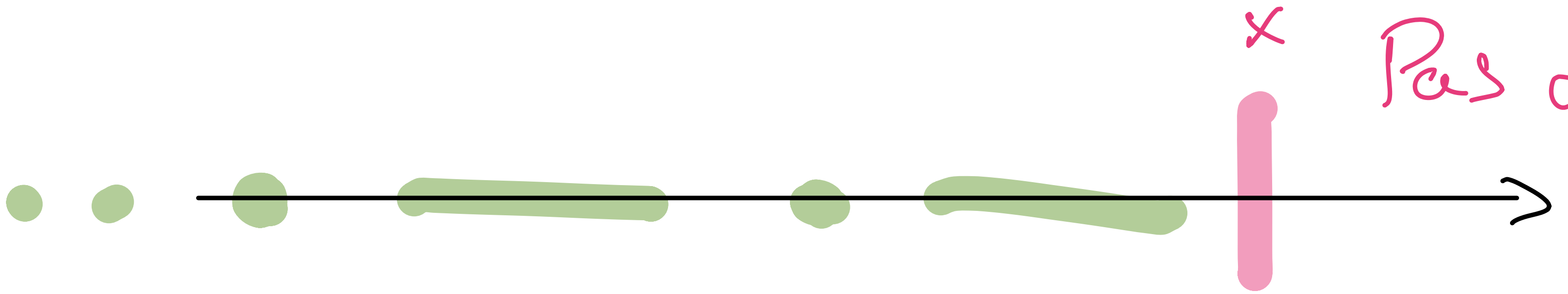
(i) $x \in \mathbb{R}$ est un minorant de A si

$$\forall a \in A, \quad x \leq a$$



(ii) $x \in \mathbb{R}$ est un majorant de A si

$$\forall a \in A, \quad a \leq x$$



Pas d'élément de A à droite d'ici

(iii) On dit que A est *minoré* si A admet un minorant, i-e.

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall a \in A, x \leq a$$

(iv) On dit que A est *majoré* si A admet un majorant, i-e.

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall a \in A \ x \geq a$$

(v) On dit que A est *borné* si A est minoré & majoré

$$\exists x, y \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall a \in A \ x \leq a \leq y.$$

Remarque 1.6 : (i) Un majorant M d'un ensemble A n'est pas nécessairement un élément de A un minorant m n'est pas nécessairement un élément de A

(ii) Si il existe un majorant (resp. minorant) il en existe une infinité. Si x est un majorant (resp. minorant) n'importe quel $y > x$ (resp. $y < x$) est également un majorant. (resp. minorant).

<u>Exemple 1.7</u>

(i) $\mathbb{N}$ est minoré mais pas majoré

$\mathbb{N}$ est minoré : $\underline{\text{Anq}}$ $\exists x \in \mathbb{R}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ tq $x \leq n$

Posons $x = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Alors,

$x = 0 \leq n$ qui est le résultat.

$\neg(\mathbb{N} \text{ est majoré})$

$\neg(\exists x \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}, x \geq n)$

$\forall x \in \mathbb{R}, \neg(\forall n \in \mathbb{N}, x \geq n)$

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tq } \neg(x \geq n)$

<u>Ainsi</u> $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tq } x < n.$

$\lceil a \rceil$ = partie entière supérieure

$\lceil 2{,}4 \rceil = 3, \quad \lceil \pi \rceil = \lceil 3{,}1415\ldots \rceil = 4$

$\lceil e \rceil = \lceil 2{,}\ldots \rceil = 3 \quad \lceil 14 \rceil = 14$

Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Posons $n = \lceil |x| \rceil + 1 \in \mathbb{N}$

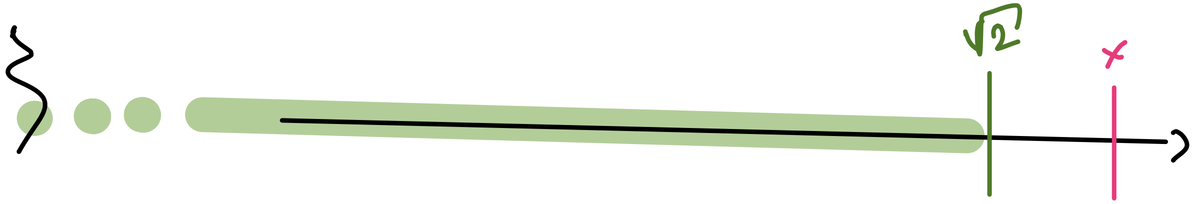
Alors, $x \leq |x| \leq \lceil |x| \rceil < \lceil |x| \rceil + 1 = n$

(ii) Soit $A = \{a \in \mathbb{R} : a \cdot |a| < 2\}$

<u>Cas 1</u> $a \geq 0$: $\quad a \cdot |a| < 2 \Leftrightarrow a^2 < 2 \Leftrightarrow a < \sqrt{2}$ $\quad$ ($a \geq 0$)

<u>Cas 2</u> $a < 0$: $\quad a \cdot |a| < 2 \Leftrightarrow -a^2 < 2$ toujours vrai

$A = \{ a \in \mathbb{R} : a < \sqrt{2} \}$



A est majoré, mais pas minoré

Proposition 1.8 Soient $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Alors,

(i) Si B est minoré, A est minoré également

(ii) Si B est majoré A est majoré également.

x il est juste à gauche de $\sqrt{2}$

milieu $= \frac{x+\sqrt{2}}{2}$

→ notion de nombre juste à gauche, juste à droite n'a pas de sens.

Théorème 1.9

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

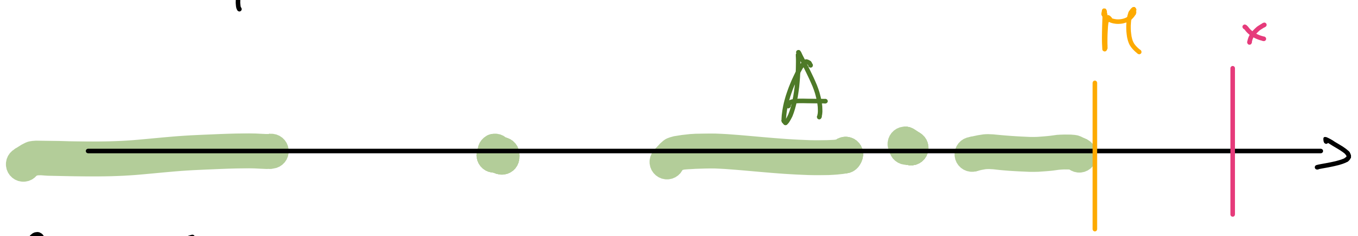
(i) Si A est minoré, il existe un plus grand minorant

i.e. $\exists$ un unique minorant m tq si x est n'importe quel minorant de A, on a $m \geq x$

(ii) Si A est majoré, $\exists$ un plus petit majorant. i.e.

$\exists$ un unique majorant M tq si x est un majorant de A, on a $M \leq x$.

x est un majorant de A



<u>Définition 1.10</u> Suprémum/infimum

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

(i) Si A est minoré, le plus grand minorant est appelé l'<u>infimum</u> de A et on le note $\inf A$

(ii) Si A est majoré, le plus petit majorant est appelé le <u>suprémum</u> de A et on le note $\sup A$

Théorème 1.11 Caractérisation du inf & sup

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

(i) $x = \inf A$ si et seulement si $\forall a \in A,\ x \leq a$ (x est un minorant)

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A$ tq $a \leq x + \varepsilon$

(x est le plus grand des minorants)

x le plus grand des minorants,

$\forall y > x$, y n'est pas un minorant

$\forall y > x,\ \exists a \in A$ tq $a < y$

$\varepsilon = y - x$

(ii) $x = \sup A$ si et seulement si $\forall a \in A\ \ x \geq a$ (x est un majorant)

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A$ tq $a \geq x - \varepsilon$

(x est le plus petit des majorants)