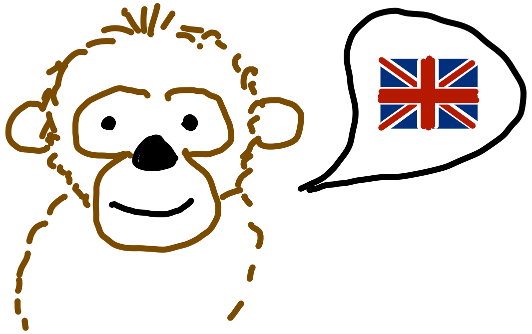
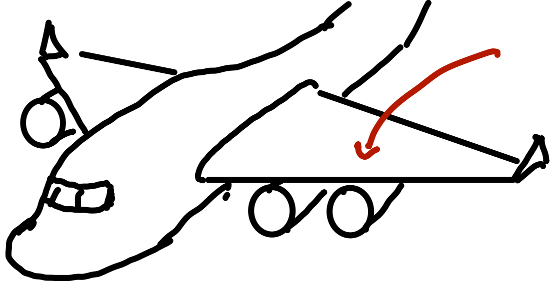
$\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 0\}$





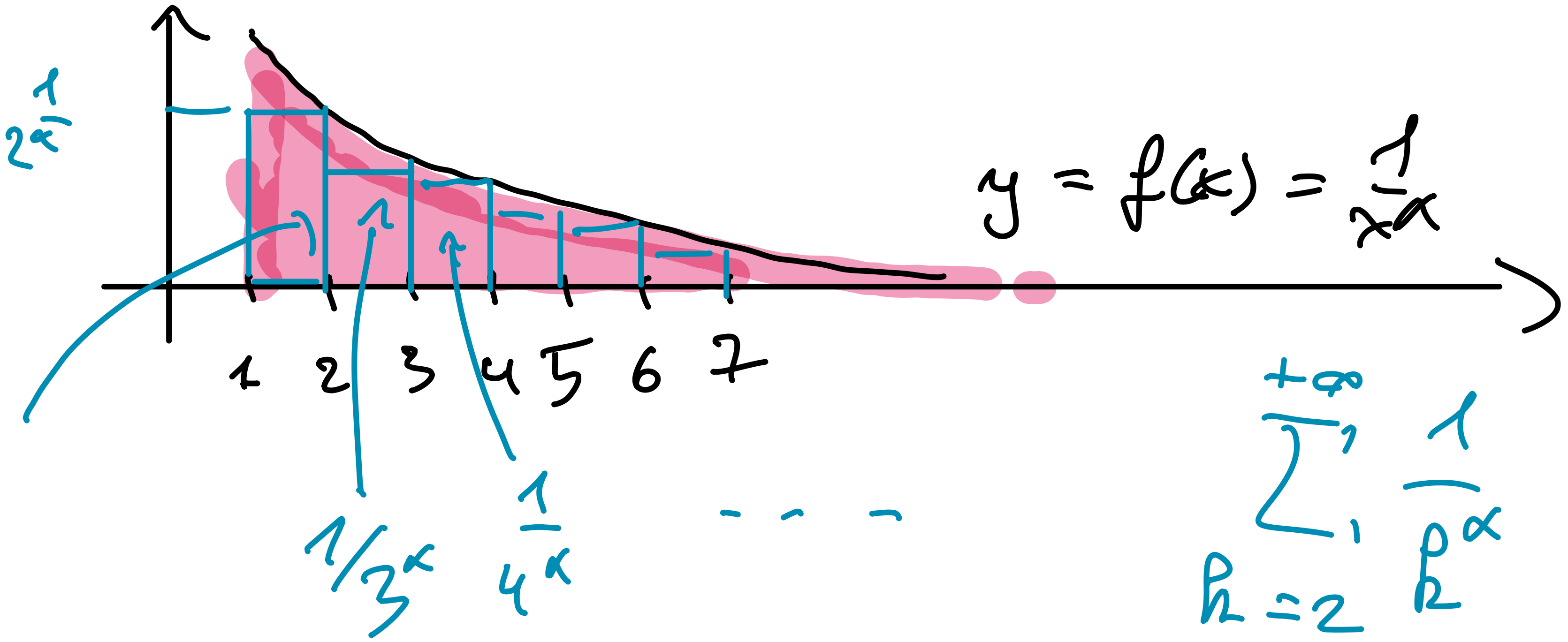
Exemple 9.30 (ii)

Soit $\alpha > 0$. L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Proposition 9.31

Soit $\alpha > 0$. La série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Preuve: "$\Longleftarrow$" : Supposons $\alpha > 1$, montrons que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge.



Soit $n \geq 2$ quelconque. Vu que $\frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante,

on a $\forall x \in [n-1, n]$, $\frac{1}{x^\alpha} \geq \frac{1}{n^\alpha}$

$$\Rightarrow \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \geq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{n^\alpha}\,dx = (n-(n-1))\frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}$$

De plus, $\sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$

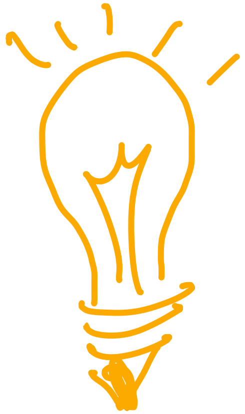
$$= \lim_{N \to \infty} \int_1^2 \frac{1}{x^\alpha} dx + \int_2^3 \frac{1}{x^\alpha} dx + \dots + \int_{N-1}^N \frac{1}{x^\alpha} dx$$

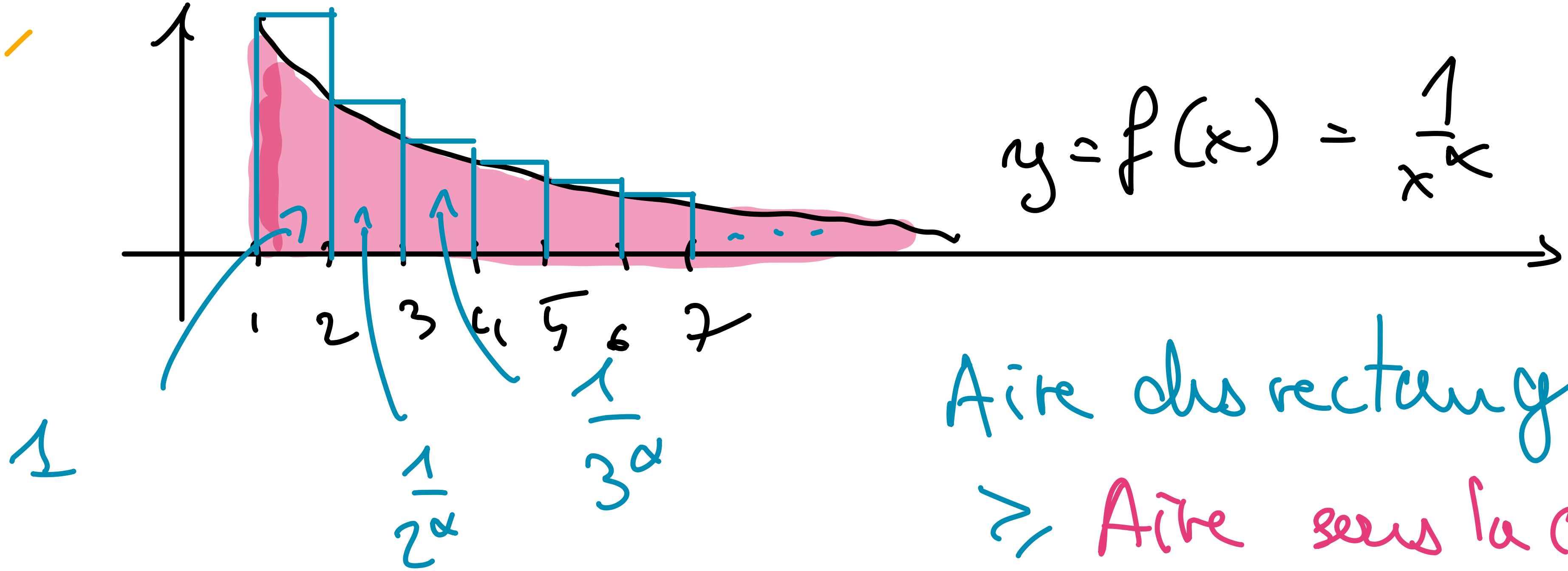
$$= \lim_{N \to \infty} \int_1^N \frac{1}{x^\alpha} dx \underset{\text{exemple 3.42 (iii)}}{=} \frac{1}{\alpha - 1}$$

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge. Vu que $\left| \frac{1}{n^\alpha} \right| = \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^\alpha} dx$

$\Rightarrow$ Par le critère de comparaison, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge

"$\underline{\Rightarrow}$" : Par contraposée supposons $0 < \alpha \leq 1$ et montrons $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.





$y = f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$

$+\infty$

Aire des rectangles

$\geq$ Aire sous la courbe $= +\infty$

Soit $n \geq 1$ quelconque. Vu que $\frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante, on a $\forall x \in [n, n+1]$

$$\frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

Donc $$\int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n^\alpha}\,dx = \frac{1}{n^\alpha}$$

Or, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{N \to +\infty} \int_1^{N+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = +\infty.$

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ diverge.

Vu que $\displaystyle\frac{1}{n^\alpha} \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \geq 0$, on a par le critère de comparaison $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

$f \geq 0$

Plus généralement, si $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ est décroissante, continue. Alors,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \text{ converge} \iff \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge}$$

§ 9.5 Primitives de séries entières et DLs

Proposition 9.32 Primitive d'un DL

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $x_0 \in I$, $f \in C^n(I)$ dont le DL autour de x_0 est

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o(|x-x_0|^n)$$

et soit F une primitive de f. Alors, le DL de F d'ordre $n+1$ autour de x_0 s'écrit

$$F(x) = C + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1} + o(|x-x_0|^{n+1})$$

$$= C + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{k} (x-x_0)^k \qquad + o\left(|x-x_0|^{n+1}\right)$$

où $C = F(x_0)$

<u>Proposition 9.33</u> Primitive d'une série entière

Soit $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k$ une série entière avec rayon de convergence $r>0$. Alors, les séries entières de la forme

$$C + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1} = C + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{k-1}}{k} (x-x_0)^k$$

Ont le même rayon de convergence $r>0$ et sont les primitives de $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k$ sur $]x_0-r, x_0+r[$

<u>Exemple 9.X (i)</u> Série de Taylor de arctan ? (autour 0)

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (x^2)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}$$

$$\Rightarrow \arctan(x) = C + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

$\arctan(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \arctan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$

(ii) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$

la primitive de e^{-x^2} qui s'annule en 0.

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(-x^2\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\, x^{2k}$$

$$\Rightarrow f(x) = \underset{0}{\cancel{c}} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\cdot k!}\, x^{2k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

I : $\{0\}$, $]-r, r[$, $[-r, r[$, $]-r, r]$,

$[-r, r]$, $\mathbb{R}$

$\underline{\{0\}}$: $a_k = k!$ $\qquad \sum_{k=0}^{+\infty} k!\, x^k$

d'Alembert : $\lim_{k \to \infty} \dfrac{|(k+1)!\, x^{k+1}|}{|k!\, x^k|} = (k+1)\,|x| = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

$]-r, r[$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{r^k} x^k \qquad \frac{(-1)^k}{\cancel{k}} x^k \quad [-1, 1[\qquad]-1, 1]$$

$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$

polynomial, exp, facto.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{r^n} |x|^n\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{r} = \frac{|x|}{r} < 1$$

$\iff |x| < r$

$x = -r$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{r^k} (-r)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$ diverge

$x = r$ $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{r^k} r^k = \sum_{k=0}^{+\infty} 1$ diverge

$]-r, r[$: $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k \cdot r^k} x^k$

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(k+1) r^{k+1}} x^{k+1}}{\frac{1}{k r^k} x^k} \right| = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\frac{k}{k+1}}_{\to 1} \frac{r^k}{r^{k+1}} \frac{|x|^{k+1}}{|x|^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|}{r} < 1$$

$\Leftrightarrow \quad |x| < r$

$\boxed{x = -r}$ $\quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k\, r^k} (-r)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ converge

$\boxed{x = r}$ $\quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k r^k} (+r)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k}$ diverge.

$\underline{]-r,r]}$: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k r^k} x^k$ rayon toujours pareil,

$\boxed{x=-r}$ $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k \cdot r^k} (-r)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ diverge

$\boxed{x=r}$ $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k r^k} (r)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ converge!

$\underline{[-r, r]}$: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 r^k} x^k$ | $\sum \frac{1}{k^\alpha} \cdot \frac{1}{r^k} x^k$

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{\frac{1}{(k+1)^2 r^{k+1}} x^{k+1}}{\frac{1}{k^2 r^k} x^k} \right| = \lim_{k \to \infty} \underbrace{\frac{k^2}{(k+1)^2}}_{\to 1} \frac{r^k}{r^{k+1}} \frac{|x|^{k+1}}{|x|^k}$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{|x|}{r} = \frac{|x|}{r} < 1 \iff |x| < r$$

$\boxed{x = -r}$ $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 r^k} (-r)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ converge

$\boxed{x = r}$ $\sum \frac{1}{k^2 r^k} r^k = \sum \frac{1}{k^2}$ converge

$[-r, r]$ $\qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\, r^{2k}}\, x^{2k}$

$\boxed{x = r}$ $\qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k \cdot \cancel{r^{2k}}}\, \cancel{r^{2k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ converge

$\boxed{x = -r}$ $\qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k \cdot r^{2k}}\, (-r)^{2k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ converge.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}\, \frac{1}{r^k}\, x^k \; \Big/ \; \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}\, \frac{1}{r^k}\, x^k$$

$$\underline{\mathbb{R}} : \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$