Info : RàQ finale avant examen : Ve 9 janvier 2025 dès 14h

IZOK?

Série entière ou Série de Taylor ?

Taylor : $f \to a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \to \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k \to R, I \to f(x) \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k$

Série entière $(a_k) \to \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k \to R, I \to f(x) \overset{DEF}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k$

Thm 8.21 : $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k}$ une série entière de rayon $r > 0$.

(i) $f \in C^\infty(]x_0 - r, x_0 + r[)$

$\sum \frac{d}{dx}\left[a_k (x-x_0)^k\right]$

(ii) $f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} (x-x_0)^k$

f' est une série entière avec le même rayon de convergence. Plus généralement,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k (x-x_0)^{k-n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+n)!}{k!} a_{k+n} (x-x_0)^k$$

En particulier $f^{(n)}(x_0) = n!\, a_n$

(iii) f est analytique sur $]x_0 - r, x_0 + r[$

Chapitre 9 : L'intégrale

§9.1 Primitives

Définition 9.1 (Primitive)

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert, $f : D \to \mathbb{R}$. Une fonction $F : D \to \mathbb{R}$ est une *primitive* de f si $\forall x \in D$,

$$F'(x) = f(x)$$

On note alors $\int f(x)\,dx$ ou $\boxed{\int^x f(t)\,dt}$

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

$$F(g(y)) = \int f(g(y))\,dg(y)?$$

$$= \int f(x)\,dg(y)?$$

$$= \int f(g(y))\,dx?$$

$$\neq \int f(g(y))\,dy$$

$$F(g(y)) = \int^{g(y)} f(t)\,dt$$

Remarque 9.2 :

Si $\exists$ F une primitive de f, alors il en existe une infinité : $\forall$ constante $C \in \mathbb{R}$, $F + C$ est aussi une primitive de f.

Proposition 9.3

Soient D un ouvert, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions admettant une primitive. Alors,

(i) On a $\int^x (\alpha f(t) + \beta g(t))\, dt = \alpha \int^x f(t)\, dt + \beta \int^x g(t)\, dt$

À lire : si $F' = f$, $G' = g$, $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$

(ii) si de plus, g est dérivable et $g(D) \subseteq D$

$$\int^x f(g(t))\, g'(t)\, dt = \int^{g(x)} f(t)\, dt$$

Se lit si $F' = f$, $F \circ g$ est une primitive de $f(g(x)) \cdot g'(x)$.

(iii) (IPP) si de plus, f et g sont dérivables,

$$\int^x f'(t) g(t)\, dt = f(x) \cdot g(x) - \int^x f(t) g'(t)\, dt$$

Se lit : si Φ est une primitive de fg', $f(x)g(x) - \Phi(x)$ est une primitive de $f'g$

D	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
$f(x)$	c	x^n	x^a	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
$\int^x f(t)dt$	$c \cdot x$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$	$\frac{1}{a+1} x^{a+1}$	$\log\lvert x\rvert$	$\arctan(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\log(\cos(x))$

D	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x)$	e^x	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\log(x)$
$\int^x f(t)dt$	e^x	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$x(\log(x) - x$

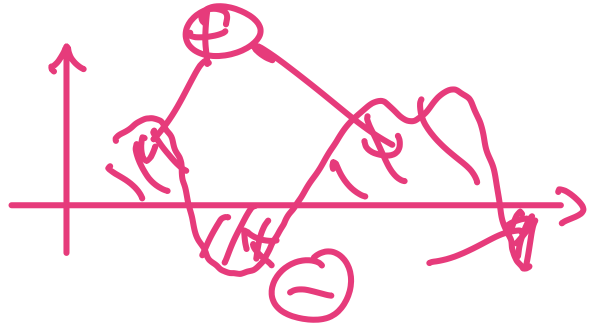
$$\begin{cases} \log(x) + C_1 & \text{si } x>0 \\ \log(-x) + C_2 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

toutes les primitives de $1/x$

§ 9.2 L'intégrale de Riemann

9.6 – 9.8 polycopié : Définition formelle de l'intégrale

<u>Définition</u> : L'intégrale, c'est l'aire signée sous la courbe si ça a un sens



<u>Théorème 9.9</u>

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, f est intégrable (i.e. la notion d'aire signée sous la courbe a un sens.)

Proposition 9.10

Soient $a<c<b$, $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continues, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Alors,

(i) on a $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

(ii) L'intégrale est linéaire, i.e.

$$\int_a^b \alpha f(x)+\beta g(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$$

(iii) Si $f\leq g$, $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

(iv) si $f\geq 0$ et $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Alors, $\forall x\in[a,b]$ $f(x)=0$

(v) $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ "Pseudo inégalité du Δ"

<u>Théorème 9.11</u> Théorème fondamental du calcul intégral

Soient $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors,

(i) La fonction $F :]a,b[\to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$ est une primitive de f

(ii) $\forall x_0 \in [a,b]$, la fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} \int_{x_0}^x f(t)dt & \text{si } x > x_0 \\ 0 & \text{si } x = x_0 \\ -\int_x^{x_0} f(t)dt & \text{si } x < x_0 \end{cases} := \int_{x_0}^x f(t)dt$$

est une primitive de f, i.e. $\forall x \in]a,b[$, $F'(x) = f(x)$

et $F'_d(a) = f(a)$ & $F'_g(b) = f(b)$

(iii) si $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une primitive de f. Alors,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

<u>Exemple 9.12</u> :

Soit $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$.

On a vu que $F(x) = -\cos(x)$ est une primitive de f. Ainsi,

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = F(2\pi) - F(0) = -\cos(2\pi) - (-\cos(0)) = 0$$

Remarque 9.13

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors, f admet une primitive. Il suffit de considérer $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$.

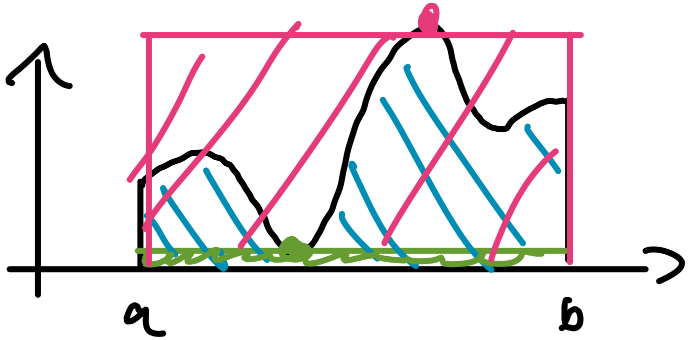
Néanmoins cette primitive ne s'écrit pas nécessairement avec des combinaisons de fonctions élémentaires (sin, cos, polynômes, exp, leurs réciproques, etc...)

Par exemple $\int_0^x e^{-t^2} dt$ est une primitive de e^{-x^2} mais, $\int_0^x e^{-t^2} dt$ ne peut pas s'écrire sans "$\int$"

Théorème 9.14 : (Théorème de la moyenne)

Soient $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue. Alors, $\exists c\in[a,b]$

tq $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$



$\max f\cdot(b-a)$ c'est trop grand

$\min f\cdot(b-a)$ c'est trop petit

§9.3 Techniques de calcul d'intégrales

Notation 9.15 :

On écrit $\Big[f(x)\Big]_a^b$ pour $f(b)-f(a)$

De telle sorte que

$$\int_a^b f'(x)dx = [f(x)]_a^b$$

Théorème 9.16 : Intégration par parties (IPP)

Soient $a<b$, $f, g \in C^1([a,b])$

Alors $$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

Exemple 9.17 poly $\cos(\alpha x)$ $\sin(\alpha x)$ $e^{\alpha x}$

(i) Calculons $$\int_0^{\pi} (x^2+1)\cdot\cos(x)\,dx \overset{IPP}{=} [(x^2+1)\sin(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x\sin(x)\,dx$$

$f(x) = x^2+1 \qquad g(x) = \sin(x)$

$f'(x) = 2x \qquad g'(x) = \cos(x)$

$$= (\pi^2+1)\cdot \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} - (0^2+1)\cdot\sin(0) - \int_0^{\pi} 2x\sin(x)\,dx$$

$$= -\int_0^{\pi} 2x\sin(x)\,dx = -\Big[-2x\cos(x)\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} -2\cos(x)\,dx$$

$f(x) = 2x \qquad g(x) = -\cos(x)$

$f'(x) = 2 \qquad g'(x) = \sin(x)$

$$= 2\pi\cdot\cos(\pi) - 2\cdot 0\cdot\cos(0) - 2\int_0^{\pi}\cos(x)\,dx$$

$$= -2\pi - 2\Big[-\sin(x)\Big]_0^{\pi} = -2\pi + 2\sin(\pi) - 2\sin(0)$$

$$= -2\pi$$