#2025-2026, #Analyse i

Info : Cours de mercredi en CO1 au lieu du STCC

## Séries de Taylor : $f \in C^\infty$

$$\forall n,\quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(|x|^n)$$

$$\overset{?}{\Longrightarrow}\quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + r_n(x)$$

**Exemples 8.13** : (i) Des fcts oui, $\displaystyle \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$.

(ii) Des fcts non :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Alors, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

$$\boxed{f(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k \qquad + r_n(x)$$

$\forall k,\ f^{(k)}(0) = 0$

$$\overset{?}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{0}{k!} x^k + r_n(x)$$

$$\forall n,\ \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{x^n} = 0$$

$$= \boxed{r_n(x)}$$

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty} f(x) = f(x) \quad \neq 0 \quad \text{si } x \neq 0$$

:(

$$f(x) \neq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \qquad \text{pour } x_0 \neq 0.$$

**Définition 8.14** (fonction analytique, série de Taylor)

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $f \in C^\infty(I)$

(i) Pour $x_0 \in I$, on dit que $f$ <u>est analytique en $x_0$</u> si $\exists\, \delta > 0$ tq $\forall x \in ]x_0-\delta, x_0+\delta[$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$\forall x \in ]x_0-\delta, x_0+\delta[$, la série converge

la série qui dépend du paramètre $x$ converge vers $f(x)$

La série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ est appelée la série de Taylor de $f$ autour de $x_0$

(ii) On dit que $f$ est <u>analytique</u> si $\forall x_0 \in I$, $f$ est analytique en $x_0$.

## Exemple 8.15 (Séries de Taylor des fonctions usuelles à connaître)

Les polynômes sont analytiques ; la série de Taylor d'un polynôme est une somme finie

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}. \qquad \forall x \in ]-1,1[$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \qquad \forall x \in ]-1,1[$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k . \qquad \forall x \in ]-1,1[$$

## Exemple 8.16

(i) Soit $f : ]-1,1[ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2+x}$

Calculons la série de Taylor de $f$ autour de $x_0 = 1$

$$f(x) = \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2+(x-1)+1} = \frac{1}{3+(x-1)}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{x-1}{3}} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{x-1}{3}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{3^{k+1}} (x-1)^k$$

(ii) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{2x}$

Calculer la série de Taylor de $f$ autour de $x_0 = 1$.

$$f(x) = e^{2(x-1)+2} = e^2 e^{2(x-1)}$$

$$= e^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(2(x-1)\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k e^2}{k!} (x-1)^k.$$

Ça va pas marcher :-/

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left((2(x-1)) + 2\right)^k \rightsquigarrow \sum_{k=0}^{+\infty} ☺ (x-1)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} 2^j (x-1)^j \cdot 2^{k-j} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} 2^k (x-1)^j$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} 2^k (x-1)^j$$

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \bigcirc \, (x-1)^j$$

Morale de l'histoire : Avant d'utiliser une série de Taylor connue, vérifier qu'on la compose avec $(x-x_0)^m \cdot \text{const}$.
(et pas de $(x-x_0)^m + \text{const}$ !)

On peut aussi trouver cette série de Taylor avec la définition :

$f(x) = e^{2x}$, $f'(x) = 2e^{2x}$, $f''(x) = 2\cdot 2 \cdot e^{2x} = 4e^{2x}$

CONJECTURE

$f'''(x) = 2\cdot 4 e^{2x} = 8e^{2x} \ldots$ $\qquad f^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$

On montre cette conjecture par récurrence (omise ici)

Série de Taylor de $f$ est $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k e^{2\cdot 1}}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k e^2}{k!}(x-1)^k.$$

## § Séries entières

### Théorème 8.17

Soit $(a_k)_{k \geq 0}$ une suite, $x_0 \in \mathbb{R}$ et la série avec paramètre $x$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k$$

Alors, il y a 3 possibilités :

(i) La série ne converge que pour $x = x_0$

(ii) $\exists r > 0$ tq la série converge absolument pour $x \in ]x_0 - r, x_0 + r[$ et diverge pour $x \notin [x_0 - r, x_0 + r]$

(iii) La série converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

Dans tous les cas, l'ensemble $I = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k \text{ converge}\}$ est un intervalle.

<u>Définition 8.18</u> (Série entière, rayon de conv., intervalle de convergence)

Soit une suite $(a_k)_{k \geq 0}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, et la série avec paramètre $x$ : $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k$

<u>La série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k$</u> est la fonction

$f : I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k$

où $I = \{ x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k \}$ est appelé

l'intervalle de convergence de la série entière

et si $r$ est tq

$I = ]x_0 - r, x_0 + r[$ ou $[x_0 - r, x_0 + r[$ ou $]x_0 - r, x_0 + r]$

ou $[x_0 - r, x_0 + r]$

on appelle $r$ le rayon de convergence

Par convention si $I = [x_0, x_0]$, $r = 0$, si $I = \mathbb{R}$

$r = +\infty$

## Remarque 8.19

Pour trouver le rayon de convergence on résout

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\cdot|x-x_0|^n} < 1$$

ou

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|\cdot|x-x_0|^{n+1}}{|a_n|\,|x-x_0|^n} < 1$$

pour $|x-x_0|$

## Exemple 8.20 :

(i) Soit la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k (x-1)^k$.

Crit. limsup: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n|x-1|^n} = \lim_{n\to\infty} 2|x-1| = 2|x-1|$

On résout $2|x-1| < 1$ pour $|x-1|$ : $|x-1| < \frac{1}{2}$

$r = \frac{1}{2}$.

= rayon de conv. de la série!

Si $|x-1| = \frac{1}{2}$, i.e. $x = \frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{2}$ :

$\boxed{x = \frac{1}{2}}$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \left(\frac{1}{2} - 1\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$

qui diverge car $(-1)^k \not\to 0$

$\boxed{x = \frac{3}{2}}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \left(\frac{3}{2} - 1\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} 1$

qui diverge car $1 \not\to 0$

$\Rightarrow$ l'intervalle de convergence est $\left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$

(ii) Soit la série entière

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k!\, x^k$$

d'Alembert : $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!\,|x|^{k+1}}{k!\,|x|^k} = \lim_{k\to\infty} (k+1)|x| = \begin{cases} 0 \text{ si } x=0 \\ +\infty \text{ si } x\neq 0 \end{cases}$

La série ne converge que pour $x = x_0 = 0$

$\Rightarrow$ rayon $= 0$, et l' "intervalle" de convergence est $\{0\}$

(iii) Soit la série entière

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} (x-14)^k$$

d'Alembert :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{2^{k+1}}{(k+1)!} |x-14|^{k+1}}{\frac{2^k}{k!} |x-14|^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{k+1} |x-14| = 0$$

$\Rightarrow$ la série converge $\forall x \in \mathbb{R}$ et rayon $= +\infty$.

(iv) Il arrive de voir les formules suivantes : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}, \qquad r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 4^k} (x+2)^{2k}$$

⚠ c'est faux de faire $r = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2 4^n}}{\frac{1}{(n+1)^2 4^{n+1}}}$

$= \lim_{n\to\infty} 4 \frac{(n+1)^2}{n^2} = 4$ C'est faux

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)^2 4^{k+1}} |x+2|^{2k+2}}{\frac{1}{k^2 4^k} |x+2|^{2k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{4} \underbrace{\frac{k^2}{(k+1)^2}}_{\to 1} |x+2|^2 = \frac{1}{4} |x+2|^2$$

$$\frac{1}{4}|x+2|^2 < 1 \iff |x+2|^2 < \underbrace{4} \iff |x+2| < 2$$

$\Rightarrow$ rayon de convergence de la série entière est $r=2$

Les formules peuvent induire en erreur !

La formule est vraie pour une série entière de la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k$.

On a ici une série entière de la forme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^{2k}$$

il fait toute la différence

Les formules s'adaptent :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k \longrightarrow r = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^{2k} \longrightarrow r = \sqrt{\lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}} = \sqrt{\frac{1}{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^{3k} \longrightarrow r = \left(\lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}\right)^{1/3} = \left(\frac{1}{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}\right)^{1/3}$$

⋮

Rayon de convergence de

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 4^k}(x+2)^{2k} \quad \text{est} \quad r=2.$$

Regardons encore quand $|x+2|=2$, i.e. en $x=-4$ ou $x=0$

en $\boxed{x=-4}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 4^k}(-4+2)^{2k}$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 4^k}(-2)^{2k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \cancel{\frac{1}{4^k}} \underbrace{(-1)^{2k}}_{1} \cancel{4^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

qui converge!

$\boxed{x=0}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 4^k}(0+2)^{2k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \cancel{\frac{1}{4^k}} \cancel{2^{2k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ qui converge!

$\Rightarrow$ l'intervalle de convergence est $I = [-4, 0]$.

## Théorème 8.21

Soit $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k$ une série entière de rayon $r>0$

Alors, (i) $f \in C^\infty(]x_0-r, x_0+r[)$

(ii) on a que $f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} (x-x_0)^k$