§ 8.1 Les développements limités

Théorème 8.1 :

f dérivable en x_0 $\iff$ $f(x) = h + m(x-x_0) + r(x)$

où $r(x_0) = 0$, $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{(x-x_0)} = 0$

De plus, on a alors $h = f(x_0)$, $m = f'(x_0)$

f dérivable en x_0 ssi $\exists$ approximation de f par une fonction affine où l'erreur qu'on commet tend vers 0 strictement plus rapidement que $(x - x_0)$ si $x \to x_0$

Théorème 8.2

Soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$, et f n fois dérivable sur I

Alors, si

$$a_0 = f(x_0) \quad \text{et} \quad \forall\, 1 \leq k \leq n, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

$$\exists\, r : I \to \mathbb{R} \quad \text{tq} \quad r(x_0) = 0,$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + r(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Théorème 8.3 Formule de Taylor

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $x_0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ $n+1$ fois dérivable. Alors, $\forall x \in I$, $\exists\, \theta_x \in]0, 1[$ tq

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}\big(\underbrace{x_0 + \theta_x (x-x_0)}\big)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$f^{(n+1)}(u)$ u entre x et x_0

⚠ par convention $f^{(0)} = f$

$(x-x_0)^0 = 1$

Notation 8.4 $\Big(o(|x-x_0|^n)$ & $O(|x-x_0|^n) \Big)$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, f, g définies au voisinage de x_0

(i) On écrit $f(x) = g(x) + o(|x-x_0|^n)$ si :

$$\exists\, r : D \to \mathbb{R} \text{ tq } r(x_0) = 0 \text{ et } \lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

et $f(x) = g(x) + r(x)$ $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{(x-x_0)^n} = 0$

(ii) On écrit $f(x) = g(x) + O(|x-x_0|^n)$ si

$\exists\, r : D \to \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $C > 0$ tq $r(x_0) = 0$ et $\forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$,

$$\left| \frac{r(x)}{|x-x_0|^n} \right| \leq C \quad \text{et} \quad f(x) = g(x) + O(|x-x_0|^n)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| \frac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)^n} \right| \leq C \quad \Leftrightarrow \quad |f(x)-g(x)| \leq C|x-x_0|^n$$

Remarque 8.5

(i) On introduit cette notation pour aller plus vite dans le calcul (de développements limités, ou de limite)

(ii) Pour montrer que $f(x) = g(x) + o\left(|x-x_0|^n\right)$,

on vérifie : $f(x_0) = g(x_0)$ &

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

(iii) $f(x) = g(x) + O\left(|x-x_0|^{n+1}\right)$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = g(x) + o\left(|x-x_0|^n\right)$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = g(x) + O\left(|x-x_0|^n\right) \Rightarrow f(x) = g(x) + o\left(|x-x_0|^{n-1}\right)$$

Définition 8.6 Développement limité

Soit $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0. Un <u>développement limité</u> (DL) <u>d'ordre n de f autour de x_0</u> est la donnée de $n+1$ nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ t.q.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o(|x-x_0|^n)$$

Remarque 8.7

(i) Un DL d'ordre n consiste à approximer une fonction par un polynôme de degré n et un reste (le petit o) qui converge vers 0 plus rapidement que $(x-x_0)^n$.

(ii) Pas toutes les fonctions admettent un DL d'ordre n.

(iii) le thm 8.2 assure que f n fois dérivable $\Rightarrow$ f admet un DL d'ordre n, et donne une formule pour a_k.

(v) thm 8.3 nous donne un outil pour estimer l'erreur qu'on commet si on remplace f par le polynôme.

on a $\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right| \leq \max_{y\in[x_0,x]} \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

(vii) On a 3 façons différentes d'écrire un DL d'ordre n :

1- $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o(|x-x_0|^n)$$

2- $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + r(x) \quad \text{où } r(x_0)=0, \ \lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

3- $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + (x-x_0)^n R(x) \quad \text{où } \lim_{x\to x_0} R(x) = 0.$$

<u>Proposition 8.8</u> (Unicité du DL)

Le DL est unique, i.e. si $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ sont tq $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o(|x - x_0|^n)$

et $f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k + o(|x - x_0|^n)$,

alors, $\forall\, 0 \leq k \leq n$, $a_k = b_k$

<u>Exemples</u> (DLs à connaître)

Ci-dessous les DLs autour de $x_0 = 0$.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(|x|^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(|x|^n)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(|x|^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + o(|x|^n)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots + \begin{cases} (-1)^{m-1} \dfrac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(|x|^{2m}) & \text{si } n = 2m \\ (-1)^m \dfrac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + o(|x|^{2m+1}) & \text{si } n = 2m+1 \end{cases}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \begin{cases} (-1)^m \dfrac{x^{2m}}{(2m)!} + o(|x|^{2m}) & \text{si } n = 2m \\ (-1)^m \dfrac{x^{2m}}{(2m)!} + o(|x|^{2m+1}) & \text{si } n = 2m+1 \end{cases}$$

Comment trouver/justifier ceci?

(i) Si $f(x) = e^x$

Thm 8.2 : $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$

$f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, $\dots$, $f^{(k)}(x) = e^x$

$\Rightarrow a_k = \dfrac{e^0}{k!} = \dfrac{1}{k!}$

DL : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k + o(|x|^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(|x|^n)$

(ii) Si $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$; $\qquad f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$

Intuition DL d'ordre n : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$

À montrer

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} x^k}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} x^k}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1-x} - \sum_{k=0}^{n} x^k}{x^n}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^k}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k}{x^n}$$

$k-n-1=j$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^{n+1}}{x^n} \cdot \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^{k-n-1} = \lim_{x \to 0} x \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} x^j = \lim_{x \to 0} \frac{x}{1-x} = 0$$

D'où, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(|x|^n)$ et c'est le DL de f.

Calcul de DL par combinaison de DLs

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + o(|x-x_0|^3)$$

$$g(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + b_3(x-x_0)^3 + o(|x-x_0|^3)$$

$$\Rightarrow (f+g)(x) = a_0 + b_0 + (a_1+b_1)(x-x_0) + (a_2+b_2)(x-x_0)^2 + (a_3+b_3)(x-x_0)^3 + o(|x-x_0|^3)$$

$$f(x) - g(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \underline{o(|x-x_0|^3)}$$
$$- \left(b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + b_3(x-x_0)^3 + \underline{o(|x-x_0|^3)}\right)$$

$$= a_0 - b_0 + (a_1 - b_1)(x-x_0) + (a_2-b_2)(x-x_0)^2 + (a_3-b_3)(x-x_0)^3$$
$$+ o(|x-x_0|^3)$$

Si r_f et r_g sont les fonctions qui se cachent derrière $o(|x-x_0|^n)$ dans le DL de f et g respectivement, on ne peut pas dire que $r_f - r_g = 0$, mais on peut dire

$$(r_f - r_g)(x) = o(|x-x_0|^n)$$

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + o(|x-x_0|^2)$$

$$g(y) = \underbrace{b_0 + b_1(y-y_0) + b_2(y-y_0)^2}_{} + o(|y-y_0|^2$$

$\hookrightarrow \quad g(f(x)) \overset{?}{=}$ $\downarrow$ remplacer y par $a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2$

__Proposition 8.10__ Trust me bro!

Lorsqu'on calcule le DL d'une composition de fonction $g(f(x))$ autour de x_0, on calcule le DL de f autour de x_0, on calcule le DL de g autour de $f(x_0)$.

On compose les polynômes et ça marche!

Exemple 8.11

(i) Calculons le DL de $\frac{e^x}{1-x}$ autour de $x_0=0$ et d'ordre 2. On a

$$\frac{e^x}{1-x} = \frac{1}{1-x}\cdot e^x$$

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+o(|x|^2)$$

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(|x|^2)$$

$$\frac{1}{1-x}e^x = \left(1+x+x^2+o(|x|^2)\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(|x|^2)\right)$$

$$= \left(1+x+\frac{x^2}{2}+x+x^2+\frac{x^3}{2}+x^2+x^3+\frac{x^4}{2}\right)$$

$$+\left(o(|x|^2) + x\, o(|x|^2) + x^2 o(|x|^2) \quad + o(|x|^2) + x\, o(|x|^2) + \frac{x^2}{2}\cdot o(|x|^2) \right)$$