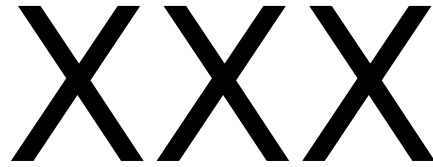




Ens: D. Strütt
Analyse I - Section
automne 2025
1 heure

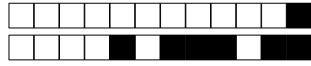


999999

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 4 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
+3 points si la réponse est correcte,
0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
-1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
+1 point si la réponse est correcte,
0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
-1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant·e se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes Read these guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		



Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda n}}{n^{1+\lambda}}$$

converge si et seulement si $\lambda \in I$, où I est l'ensemble

- $] -\infty, -1[$ $] -\infty, 0[$ $[-1, +\infty[$ $] -\infty, 0]$

Question 2 : Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = \sqrt{3}$ et, pour $n \geq 1$, $u_n = \sqrt{3u_{n-1}}$. Alors

- $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sqrt{3}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 3$ $(u_n)_{n \geq 0}$ diverge

Question 3 : Soit $A \subset \mathbb{R}$ l'ensemble défini par

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^* : \frac{1}{x} \geq 2 \right\}.$$

Alors

- $\inf A = 2$ $\inf A = \frac{1}{2}$
 A n'est pas minoré $\inf A = 0$

Question 4 : Soit l'équation

$$\frac{|z|}{z} = \frac{z^2}{4(\cos(\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3}))}.$$

Parmi les nombres complexes ci-dessous, lequel est solution de cette équation?

- $z = \sqrt[3]{4}(\cos(\frac{13\pi}{12}) + i \sin(\frac{13\pi}{12}))$ $z = \sqrt[3]{4}(\cos(\frac{\pi}{9}) + i \sin(\frac{\pi}{9}))$
 $z = 2(\cos(\frac{7\pi}{9}) + i \sin(\frac{7\pi}{9}))$ $z = 2(\cos(\frac{7\pi}{12}) + i \sin(\frac{7\pi}{12}))$

Question 5 : Soit, pour $a_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ définie pour $n \geq 1$ par $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}$.

- Si $a_0 < 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$. Si $a_0 = 0$, la suite est convergente.
 Si $a_0 > 1$, la suite est croissante. Si $a_0 < 1$, la suite est décroissante.



Question 6 : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$, et $(b_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par

$$b_n = 1 + a_n \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right), \quad n \geq 0.$$

Alors

- $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$ $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = -2$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$
 $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = -1$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$ $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$

Question 7 : Soit la suite

$$x_n = e^{2\sqrt{n^2+1}-n}.$$

Alors,

- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e$ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

Question 8 : La série $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k^3 - k}}$

- ne converge pas et ne converge pas absolument
 converge et converge absolument
 ne converge pas mais converge absolument
 converge mais ne converge pas absolument



Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 9 : Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles non vides et bornés, et $c \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\sup\{x + c : x \in A\} - \sup\{x + c : x \in B\} = \sup A - \sup B.$$

VRAI FAUX

Question 10 : Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ deux suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n < b_n$. Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ converge.

VRAI FAUX

Question 11 : Les racines du polynôme $z^4 + z^3 - 2z^2 + 2z + 4$ sont $\{-2, -1, \frac{1}{4}, 1 + i\}$.

VRAI FAUX

Question 12 : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite bornée telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 3$. Alors $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n > 3$.

VRAI FAUX

Question 13 : Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $(a_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par

$$a_n = \left(\frac{\lambda + n}{\lambda n} \right)^n.$$

Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que (a_n) converge, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

VRAI FAUX