



1













Ens: S. Deparis
Analyse I - XYZ
17 janvier 2022
3 heures

Lennon John

SCIPER: XXXXX1

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages (les dernières pouvant être vides), et 30 questions. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - +3 points si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
 - +1 point si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes Read these guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		

**Première partie, questions à choix multiple**

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : L'intégrale généralisée $\int_0^{1-} \frac{1}{1-x} dx$

 diverge converge et vaut 0 converge et vaut -1 converge et vaut 1

Question 2 : Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + \sin(x)$, et soit $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sa fonction réciproque. Alors au point $y_0 = f(\pi)$:

 $(f^{-1})'(y_0) = -\frac{1}{3}$ $(f^{-1})'(y_0) = 1$ $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{2\pi - 1}$ f^{-1} n'est pas dérivable

Question 3 : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ la suite de nombres réels définie par $a_n = \frac{(-2)^n (n!)^2}{(2n)!}$. Alors la série

numérique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est:

 convergente mais pas absolument convergente divergente car $|a_n| \rightarrow +\infty$ absolument convergente divergente car $|a_n| \rightarrow 1$

Question 4 : La série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+4}} (x+1)^n$ converge si et seulement si $x \in I$, où:

 $I =]-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}[$ $I = [-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}]$ $I =]-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}]$ $I =]\frac{1}{3}, \frac{5}{3}]$

Question 5 : Soit $I = [-3, 0]$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 3e^{\frac{x+3}{3}} - 2$. Alors pour tout $x, y \in I$ tels que $x < y$ on a:

 $1 \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 3$ $-\infty < \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 0$ $3 \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 3e$ $2 \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq e$



Question 6 : Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5x^2 - 10x - 15}{x^2 - x - 6} & \text{si } x > 3, \\ a & \text{si } x = 3, \\ bx^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x < 3. \end{cases}$$

Alors f est continue sur $[0, +\infty[$ pour:

- $a = 5, b = \frac{4}{9}$ $a = 0, b = -\frac{1}{9}$ $a = 4, b = 3$ $a = 4, b = \frac{1}{3}$

Question 7 : L'intégrale $\int_1^2 \frac{1}{x(x^2+3)} dx$ vaut:

- $\frac{1}{3} \ln(2) - \frac{1}{9} \ln\left(\frac{7}{4}\right)$ $\ln(2) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(2)$
 $\ln(4) + \ln\left(\frac{7}{2}\right)$ $\frac{1}{3} \ln(2) - \frac{1}{6} \ln\left(\frac{7}{4}\right)$

Question 8 : Soit $f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^x \cos(x)$. Alors l'ensemble image de f est égal à

- $[0, 1]$ $]0, \exp\left(\frac{\pi}{4}\right]$ $]0, 1]$ $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2} \exp\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

Question 9 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable sur \mathbb{R} , telle que $\forall x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{x \sin(x)}{\sqrt{x^2+1} - 1}.$$

Alors:

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 2$ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = +\infty$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{2}$ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0$

Question 10 : Soit $z = \frac{2i^9 - 4i^{15}}{1 - i}$. Alors:

- $z^6 = -8 \cdot 3^6 i$ $z^6 = 8 \cdot 3^6 i$ $z^6 = 8 \cdot 3^6$ $z^6 = 8 \cdot 3^6(1 + i)$

Question 11 : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $a_n = e^{-n} e^{n^2 \ln(1 + \frac{1}{n})}$. Alors:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = e$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{e}}$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

Question 12 : Soit $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^3\varepsilon(x)$ le développement limité d'ordre trois de la fonction $f(x) = e^{\sin(x)}$ autour de $x_0 = 0$. Alors a_3 est égal à:

- 1 0 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$



Question 13 : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par

$$a_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}.$$

Alors :

- $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$
- $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -1$, et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$
- $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$
- $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -1$, et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

Question 14 : Soit $f:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = \sum_{n=2}^{\infty} t^n$. Alors:

- $f'(\frac{1}{2}) = 0$ $f'(\frac{1}{2}) = -5$ $f'(\frac{1}{2}) = 3$ $f'(\frac{1}{2}) = 7$

Question 15 : Le développement limité d'ordre deux de la fonction $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$ autour de $x_0 = 0$ est:

- $f(x) = e + ex + 3e x^2 + x^2 \varepsilon(x)$ $f(x) = e + ex + \frac{3}{2}e x^2 + x^2 \varepsilon(x)$
- $f(x) = \frac{5}{2} + 2x + 2x^2 + x^2 \varepsilon(x)$ $f(x) = \frac{5}{2} + 2x + 4x^2 + x^2 \varepsilon(x)$

Question 16 : L'intégrale $\int_0^{\pi/2} e^{\sin(x)} \cos(x) dx$ vaut:

- e 0 1 e - 1

Question 17 : Soit $A = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } y = e^{-x}\}$. Alors

- $\sup A = 1$ A n'est pas majoré
- $\sup A = e$ $\inf A = 1$

Question 18 : Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $x_0 = 3$ et, pour $n \geq 1$, $x_n = \frac{3}{4}x_{n-1} + 2$. Alors:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 8$ $(x_n)_{n \geq 0}$ diverge
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 2$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 3$

**Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux**

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case **VRAI** si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case **FAUX** si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 19 : Il existe une fonction bijective et continue $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$.

VRAI FAUX

Question 20 : Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non-vidé, et soit $B = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$. Si A est majoré, alors B est majoré.

VRAI FAUX

Question 21 : Si la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-3)^k$ converge pour $x = 2.8$, alors elle converge aussi pour $x = 3.1$.

VRAI FAUX

Question 22 : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

VRAI FAUX

Question 23 : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$.

VRAI FAUX

Question 24 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction infiniment dérivable, $n \in \mathbb{N}^*$, et $f(x) = p_n(x) + x^n \varepsilon(x)$ le développement limité de f d'ordre n autour de zéro, où $p_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ est un polynôme. Alors

$$f'(0) = p'_n(0), \quad f^{(2)}(0) = p_n^{(2)}(0), \quad f^{(3)}(0) = p_n^{(3)}(0), \quad \dots, \quad f^{(n)}(0) = p_n^{(n)}(0)$$

VRAI FAUX



Question 25 : Soient $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continûment dérivables, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Alors:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

VRAI FAUX

Question 26 : Soit $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(-1) = f(1)$. Alors il existe $x_0 \in]-1, 1[$ tel que $f'(x_0) = 0$.

VRAI FAUX

Question 27 : Il existe une fonction continue $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

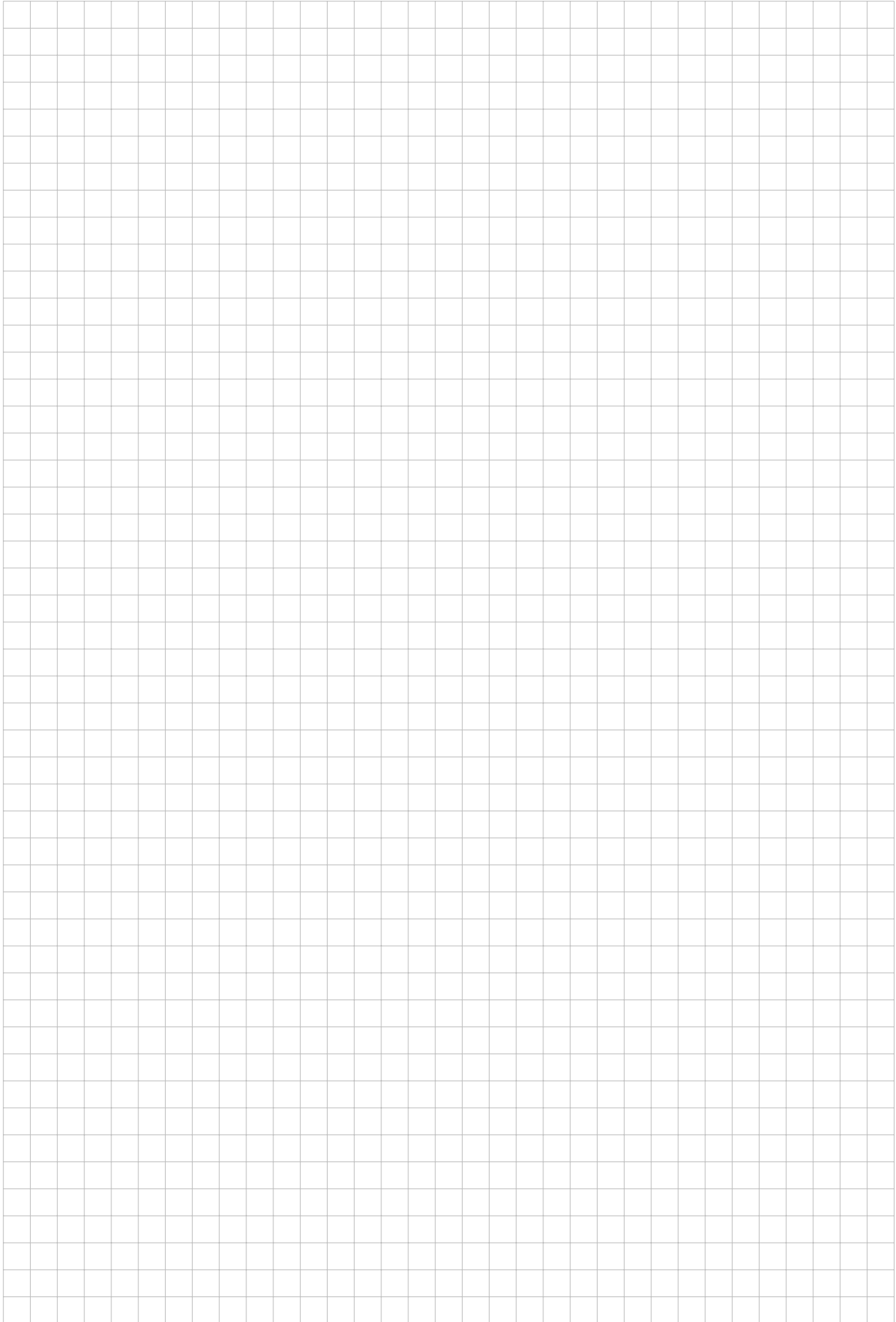
VRAI FAUX

Question 28 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $(a_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy.

VRAI FAUX



+1/8/53+





Question 30: Cette question est notée sur 8 points.

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 8	<i>Réservé au correcteur</i>
----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	------------------------------

Soit

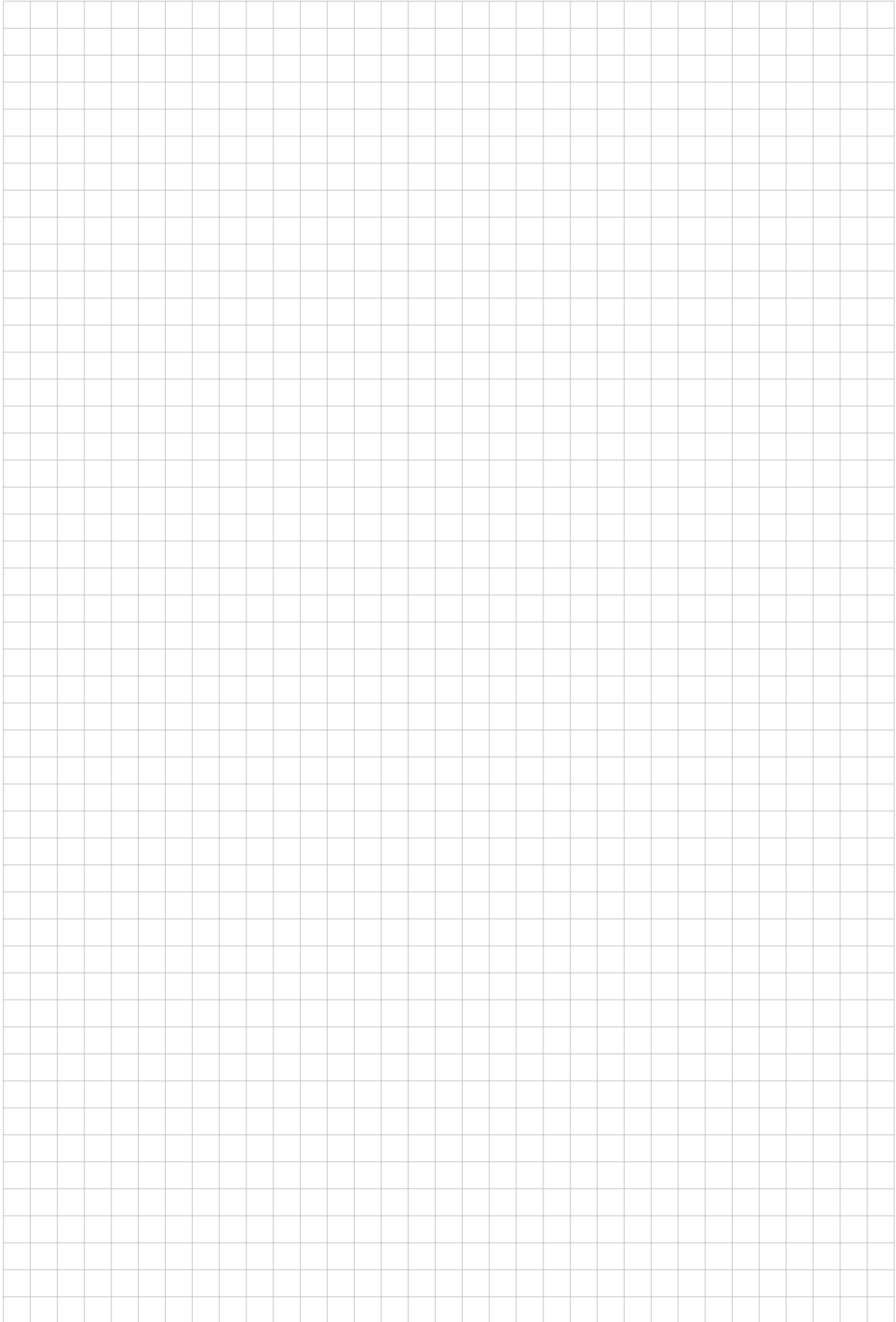
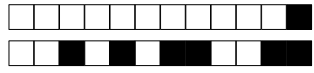
$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \ln(x) - \ln(2). \end{aligned}$$

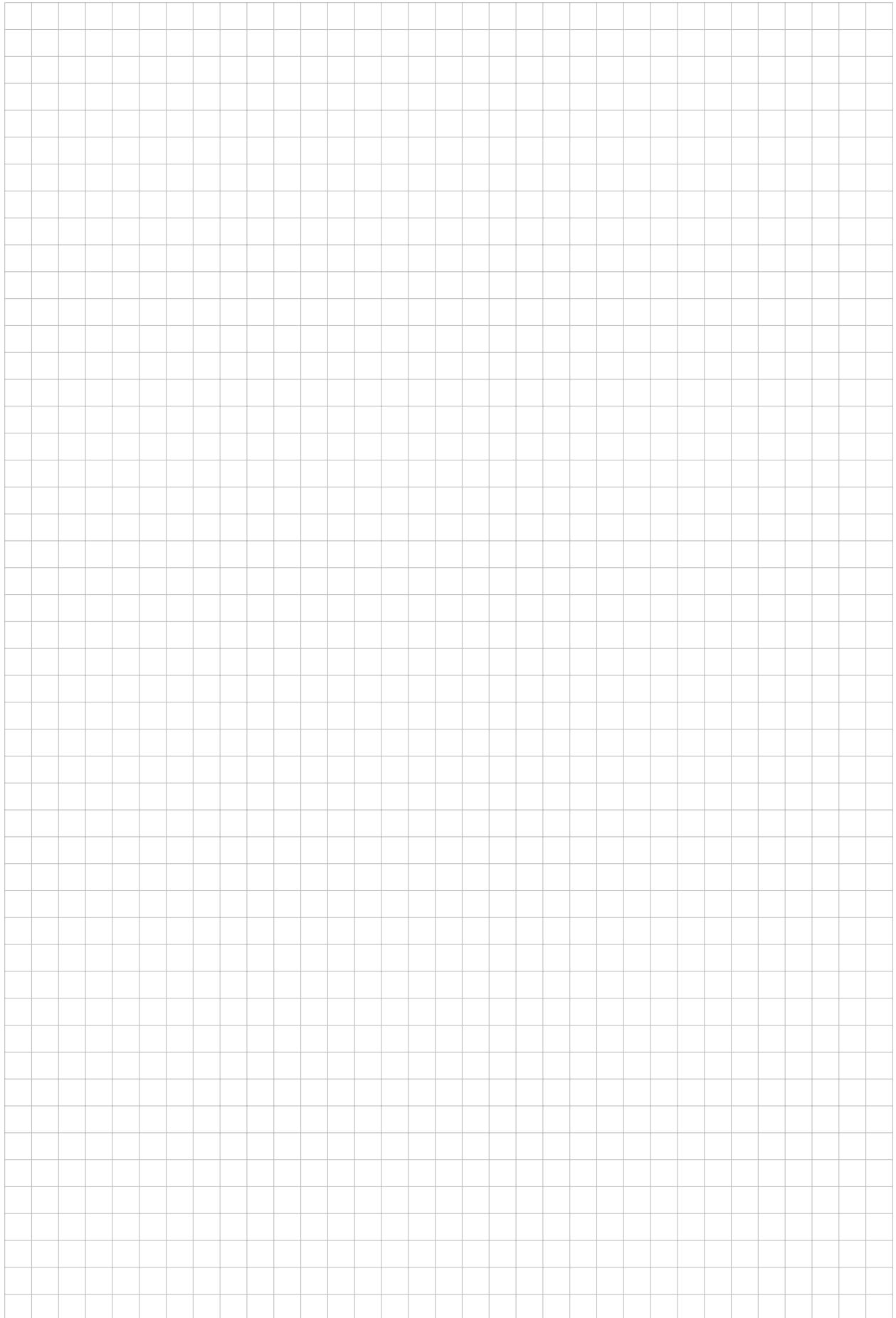
(a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

(b) Écrire la série de Taylor de f autour de $x_0 = 2$ et donner son rayon de convergence.









+1/12/49+















Ens: S. Deparis
Analyse I - XYZ
17 janvier 2022
3 heures

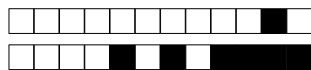
McCartney Paul

SCIPER: XXXXX2

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages (les dernières pouvant être vides), et 30 questions. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - +3 points si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
 - +1 point si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes Read these guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		

**Première partie, questions à choix multiple**

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : L'intégrale $\int_1^2 \frac{1}{x(x^2+3)} dx$ vaut:

$\ln(2) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(2)$

$\frac{1}{3} \ln(2) - \frac{1}{9} \ln\left(\frac{7}{4}\right)$

$\frac{1}{3} \ln(2) - \frac{1}{6} \ln\left(\frac{7}{4}\right)$

$\ln(4) + \ln\left(\frac{7}{2}\right)$

Question 2 : Soit $A = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } y = e^{-x}\}$. Alors

$\sup A = 1$

$\sup A = e$

A n'est pas majoré

$\inf A = 1$

Question 3 : Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $x_0 = 3$ et, pour $n \geq 1$, $x_n = \frac{3}{4}x_{n-1} + 2$. Alors:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 2$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 3$

$(x_n)_{n \geq 0}$ diverge

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 8$

Question 4 : Soit $z = \frac{2i^9 - 4i^{15}}{1 - i}$. Alors:

$z^6 = 8 \cdot 3^6 i$

$z^6 = 8 \cdot 3^6 (1 + i)$

$z^6 = 8 \cdot 3^6$

$z^6 = -8 \cdot 3^6 i$

Question 5 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable sur \mathbb{R} , telle que $\forall x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{x \sin(x)}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}.$$

Alors:

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = +\infty$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{2}$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 2$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0$

Question 6 : Soit $I = [-3, 0]$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 3e^{\frac{x+3}{3}} - 2$. Alors pour tout $x, y \in I$ tels que $x < y$ on a:

$1 \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 3$

$3 \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 3e$

$2 \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq e$

$-\infty < \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 0$



Question 7 : Le développement limité d'ordre deux de la fonction $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$ autour de $x_0 = 0$ est:

$f(x) = e + ex + \frac{3}{2}e x^2 + x^2 \varepsilon(x)$

$f(x) = \frac{5}{2} + 2x + 4x^2 + x^2 \varepsilon(x)$

$f(x) = e + ex + 3e x^2 + x^2 \varepsilon(x)$

$f(x) = \frac{5}{2} + 2x + 2x^2 + x^2 \varepsilon(x)$

Question 8 : Soit $f:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = \sum_{n=2}^{\infty} t^n$. Alors:

$f'(\frac{1}{2}) = 3$

$f'(\frac{1}{2}) = 0$

$f'(\frac{1}{2}) = -5$

$f'(\frac{1}{2}) = 7$

Question 9 : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $a_n = e^{-n} e^{n^2 \ln(1 + \frac{1}{n})}$. Alors:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = e$

Question 10 : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par

$$a_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}.$$

Alors :

$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$

$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -1$, et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -1$, et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

Question 11 : La série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+4}} (x+1)^n$ converge si et seulement si $x \in I$, où:

$I =]\frac{1}{3}, \frac{5}{3}]$

$I =]-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}]$

$I =]-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}[$

$I = [-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}]$

Question 12 : Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5x^2 - 10x - 15}{x^2 - x - 6} & \text{si } x > 3, \\ a & \text{si } x = 3, \\ bx^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x < 3. \end{cases}$$

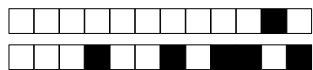
Alors f est continue sur $[0, +\infty[$ pour:

$a = 4, b = \frac{1}{3}$

$a = 0, b = -\frac{1}{9}$

$a = 4, b = 3$

$a = 5, b = \frac{4}{9}$



Question 13 : Soit $f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^x \cos(x)$. Alors l'ensemble image de f est égal à

- $]0, 1]$ $]0, \exp(\frac{\pi}{4})]$ $[0, \frac{\sqrt{2}}{2} \exp(\frac{\pi}{4})]$ $[0, 1]$

Question 14 : L'intégrale $\int_0^{\pi/2} e^{\sin(x)} \cos(x) dx$ vaut:

- 0 $e - 1$ e 1

Question 15 : Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + \sin(x)$, et soit $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sa fonction réciproque. Alors au point $y_0 = f(\pi)$:

- $(f^{-1})'(y_0) = -\frac{1}{3}$ $(f^{-1})'(y_0) = 1$
 f^{-1} n'est pas dérivable $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{2\pi - 1}$

Question 16 : Soit $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^3\varepsilon(x)$ le développement limité d'ordre trois de la fonction $f(x) = e^{\sin(x)}$ autour de $x_0 = 0$. Alors a_3 est égal à:

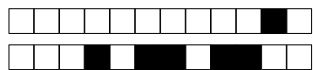
- 1 $\frac{1}{6}$ 0 $\frac{1}{2}$

Question 17 : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ la suite de nombres réels définie par $a_n = \frac{(-2)^n (n!)^2}{(2n)!}$. Alors la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est:

- divergente car $|a_n| \rightarrow +\infty$
 convergente mais pas absolument convergente
 absolument convergente
 divergente car $|a_n| \rightarrow 1$

Question 18 : L'intégrale généralisée $\int_0^{1-} \frac{1}{1-x} dx$

- converge et vaut 0 converge et vaut -1
 diverge converge et vaut 1



Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 19 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $(a_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy.

VRAI FAUX

Question 20 : Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non-vidé, et soit $B = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$. Si A est majoré, alors B est majoré.

VRAI FAUX

Question 21 : Si la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-3)^k$ converge pour $x = 2.8$, alors elle converge aussi pour $x = 3.1$.

VRAI FAUX

Question 22 : Il existe une fonction continue $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

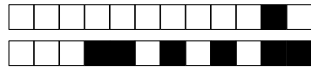
VRAI FAUX

Question 23 : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

VRAI FAUX

Question 24 : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

VRAI FAUX



Question 25 : Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(-1) = f(1)$. Alors il existe $x_0 \in]-1, 1[$ tel que $f'(x_0) = 0$.

VRAI FAUX

Question 26 : Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continûment dérivables, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Alors:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

VRAI FAUX

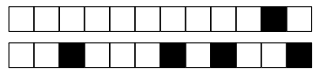
Question 27 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction infiniment dérivable, $n \in \mathbb{N}^*$, et $f(x) = p_n(x) + x^n \varepsilon(x)$ le développement limité de f d'ordre n autour de zéro, où $p_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ est un polynôme. Alors

$$f'(0) = p'_n(0), \quad f^{(2)}(0) = p_n^{(2)}(0), \quad f^{(3)}(0) = p_n^{(3)}(0), \quad \dots, \quad f^{(n)}(0) = p_n^{(n)}(0)$$

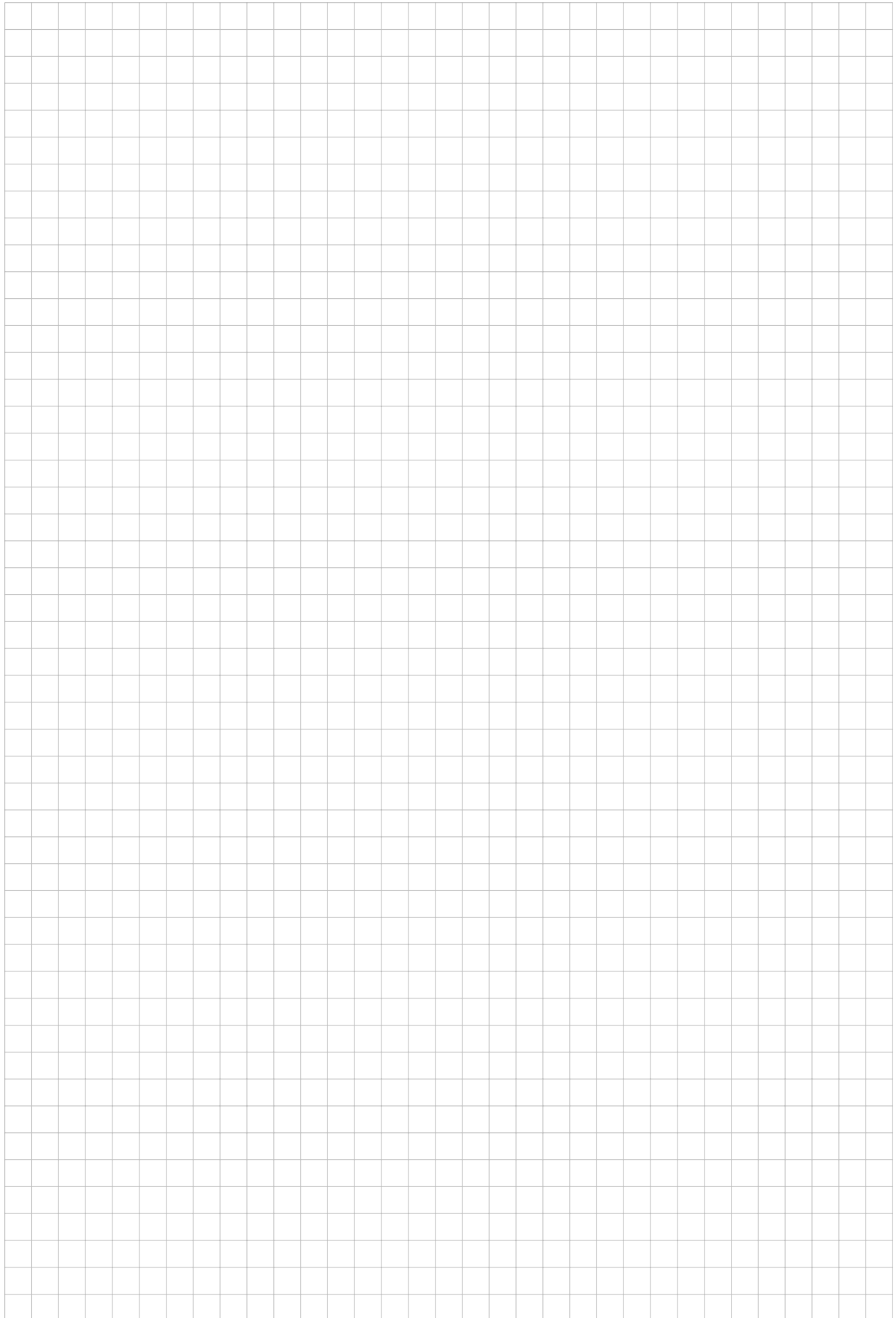
VRAI FAUX

Question 28 : Il existe une fonction bijective et continue $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$.

VRAI FAUX



+2/8/41+





Question 30: Cette question est notée sur 8 points.

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<i>Réservé au correcteur</i>
--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	------------------------------

Soit

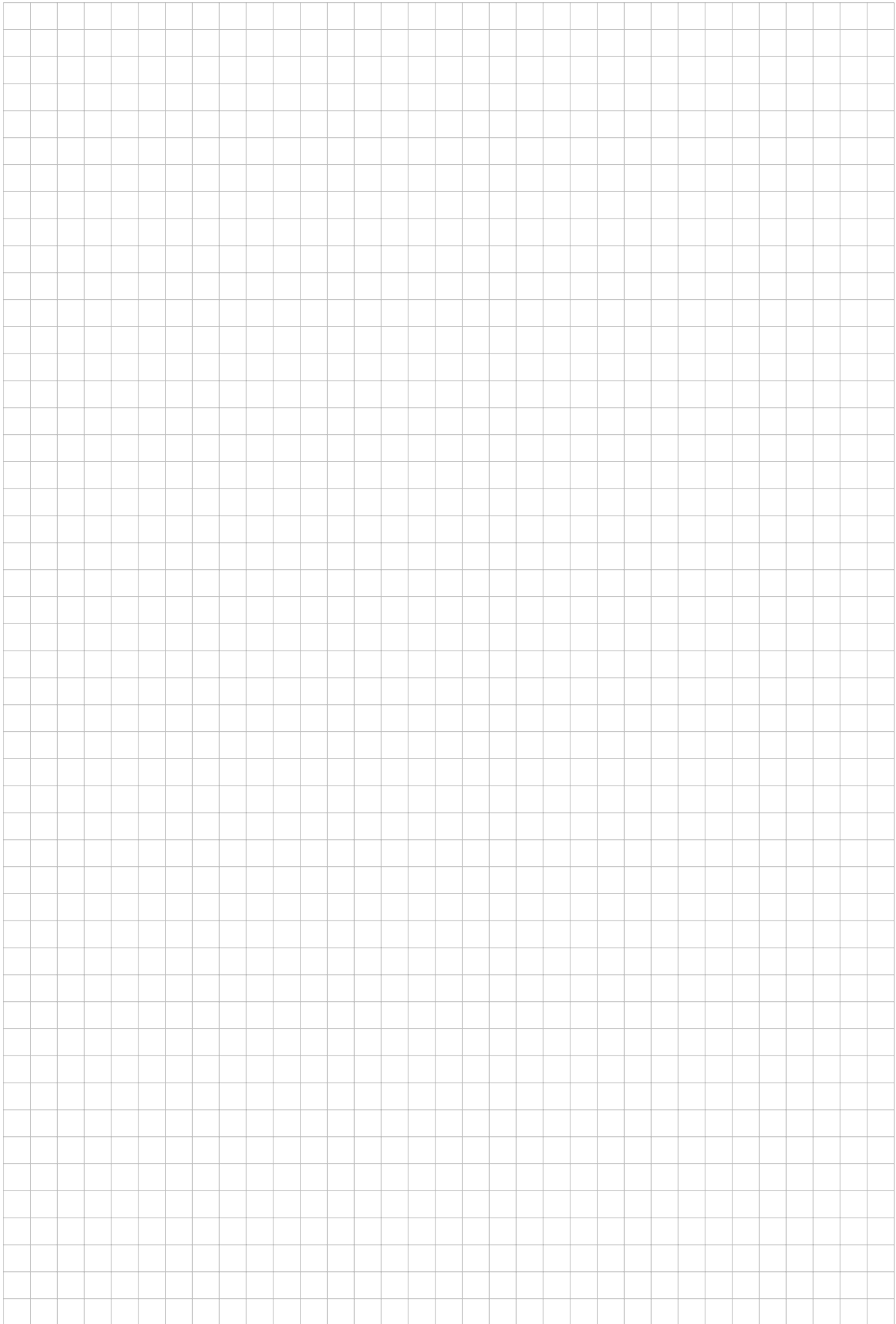
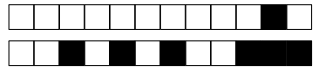
$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \ln(x) - \ln(2). \end{aligned}$$

(a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

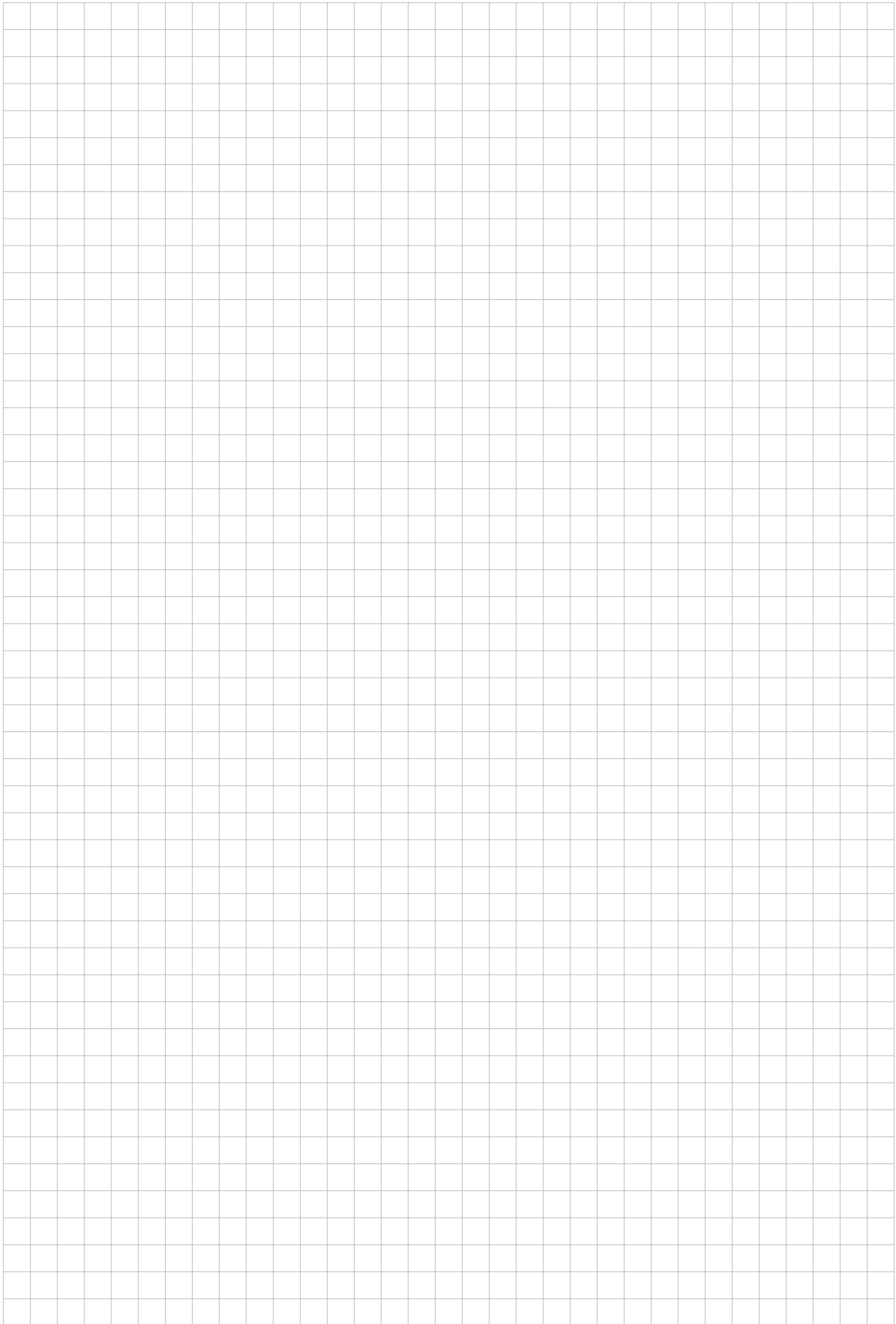
(b) Écrire la série de Taylor de f autour de $x_0 = 2$ et donner son rayon de convergence.







+2/11/38+





+2/12/37+



Ens: S. Deparis
Analyse I - XYZ
17 janvier 2022
3 heures













3

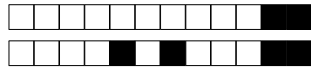
Harrison George

SCIPER: XXXXX3

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages (les dernières pouvant être vides), et 30 questions. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - +3 points si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
 - +1 point si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes Read these guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		

**Première partie, questions à choix multiple**

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : Soit $f:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = \sum_{n=2}^{\infty} t^n$. Alors:

- $f'(\frac{1}{2}) = 7$ $f'(\frac{1}{2}) = 0$ $f'(\frac{1}{2}) = -5$ $f'(\frac{1}{2}) = 3$

Question 2 : Soit $I = [-3, 0]$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 3e^{\frac{x+3}{3}} - 2$. Alors pour tout $x, y \in I$ tels que $x < y$ on a:

- $3 \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 3e$ $1 \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 3$
 $-\infty < \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 0$ $2 \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq e$

Question 3 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable sur \mathbb{R} , telle que $\forall x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{x \sin(x)}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}.$$

Alors:

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{2}$ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 2$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = +\infty$ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0$

Question 4 : Soit $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^3\varepsilon(x)$ le développement limité d'ordre trois de la fonction $f(x) = e^{\sin(x)}$ autour de $x_0 = 0$. Alors a_3 est égal à:

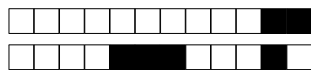
- 0 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$

Question 5 : Soit $z = \frac{2i^9 - 4i^{15}}{1 - i}$. Alors:

- $z^6 = 8 \cdot 3^6 i$ $z^6 = -8 \cdot 3^6 i$ $z^6 = 8 \cdot 3^6$ $z^6 = 8 \cdot 3^6(1 + i)$

Question 6 : L'intégrale $\int_0^{\pi/2} e^{\sin(x)} \cos(x) dx$ vaut:

- e 1 0 e - 1



Question 7 : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ la suite de nombres réels définie par $a_n = \frac{(-2)^n (n!)^2}{(2n)!}$. Alors la série

numérique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est:

- divergente car $|a_n| \rightarrow 1$
- divergente car $|a_n| \rightarrow +\infty$
- absolument convergente
- convergente mais pas absolument convergente

Question 8 : Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $x_0 = 3$ et, pour $n \geq 1$, $x_n = \frac{3}{4}x_{n-1} + 2$. Alors:

- $(x_n)_{n \geq 0}$ diverge
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 3$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 8$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 2$

Question 9 : Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + \sin(x)$, et soit $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sa fonction réciproque. Alors au point $y_0 = f(\pi)$:

- $(f^{-1})'(y_0) = 1$
- $(f^{-1})'(y_0) = -\frac{1}{3}$
- f^{-1} n'est pas dérivable
- $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{2\pi - 1}$

Question 10 : L'intégrale $\int_1^2 \frac{1}{x(x^2 + 3)} dx$ vaut:

- $\frac{1}{3} \ln(2) - \frac{1}{6} \ln\left(\frac{7}{4}\right)$
- $\ln(4) + \ln\left(\frac{7}{2}\right)$
- $\frac{1}{3} \ln(2) - \frac{1}{9} \ln\left(\frac{7}{4}\right)$
- $\ln(2) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(2)$

Question 11 : Soit $A = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } y = e^{-x}\}$. Alors

- $\sup A = e$
- $\inf A = 1$
- $\sup A = 1$
- A n'est pas majoré

Question 12 : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par

$$a_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}.$$

Alors :

- $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -1$, et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$
- $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -1$, et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sqrt{3} - \sqrt{2}$
- $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$
- $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$



Question 13 : Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5x^2 - 10x - 15}{x^2 - x - 6} & \text{si } x > 3, \\ a & \text{si } x = 3, \\ bx^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x < 3. \end{cases}$$

Alors f est continue sur $[0, +\infty[$ pour:

$a = 5, b = \frac{4}{9}$

$a = 0, b = -\frac{1}{9}$

$a = 4, b = \frac{1}{3}$

$a = 4, b = 3$

Question 14 : Le développement limité d'ordre deux de la fonction $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$ autour de $x_0 = 0$ est:

$f(x) = \frac{5}{2} + 2x + 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$

$f(x) = e + ex + 3ex^2 + x^2\varepsilon(x)$

$f(x) = \frac{5}{2} + 2x + 4x^2 + x^2\varepsilon(x)$

$f(x) = e + ex + \frac{3}{2}ex^2 + x^2\varepsilon(x)$

Question 15 : L'intégrale généralisée $\int_0^{1-} \frac{1}{1-x} dx$

converge et vaut 1

converge et vaut -1

diverge

converge et vaut 0

Question 16 : Soit $f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^x \cos(x)$. Alors l'ensemble image de f est égal à

$]0, \exp(\frac{\pi}{4})]$

$]0, 1]$

$[0, \frac{\sqrt{2}}{2} \exp(\frac{\pi}{4})]$

$[0, 1]$

Question 17 : La série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+4}} (x+1)^n$ converge si et seulement si $x \in I$, où:

$I = [-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}]$

$I =]\frac{1}{3}, \frac{5}{3}]$

$I =]-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}]$

$I =]-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}[$

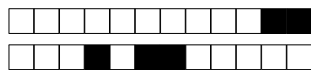
Question 18 : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $a_n = e^{-n} e^{n^2 \ln(1 + \frac{1}{n})}$. Alors:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = e$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$



Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 19 : Si la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-3)^k$ converge pour $x = 2.8$, alors elle converge aussi pour $x = 3.1$.

VRAI FAUX

Question 20 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction infiniment dérivable, $n \in \mathbb{N}^*$, et $f(x) = p_n(x) + x^n \varepsilon(x)$ le développement limité de f d'ordre n autour de zéro, où $p_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ est un polynôme. Alors

$$f'(0) = p'_n(0), \quad f^{(2)}(0) = p_n^{(2)}(0), \quad f^{(3)}(0) = p_n^{(3)}(0), \quad \dots, \quad f^{(n)}(0) = p_n^{(n)}(0)$$

VRAI FAUX

Question 21 : Il existe une fonction bijective et continue $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$.

VRAI FAUX

Question 22 : Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non-vidé, et soit $B = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$. Si A est majoré, alors B est majoré.

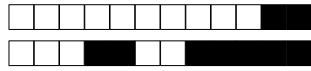
VRAI FAUX

Question 23 : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

VRAI FAUX

Question 24 : Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(-1) = f(1)$. Alors il existe $x_0 \in]-1, 1[$ tel que $f'(x_0) = 0$.

VRAI FAUX



Question 25 : Il existe une fonction continue $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

VRAI FAUX

Question 26 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $(a_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy.

VRAI FAUX

Question 27 : Soient $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continûment dérivables, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Alors:

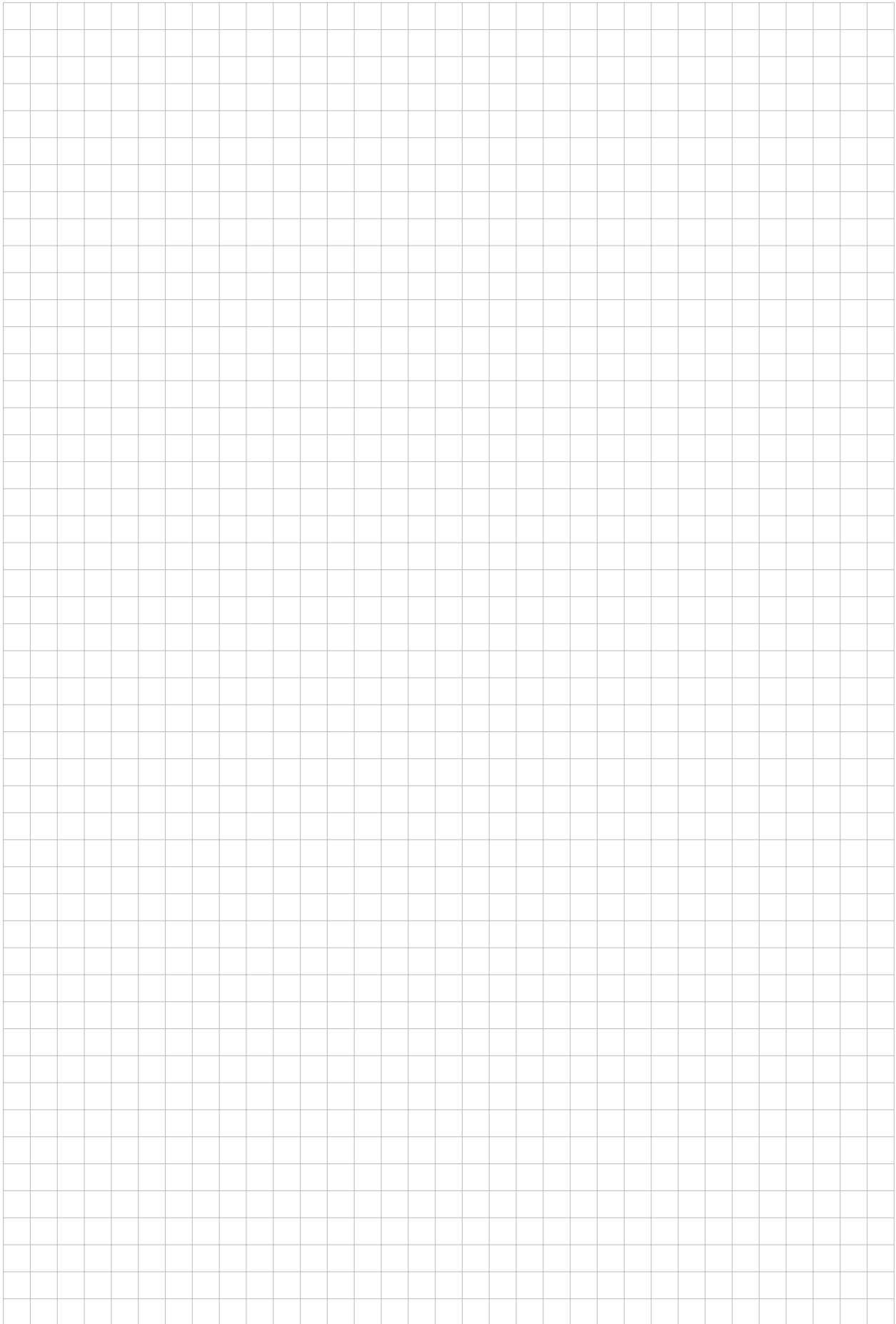
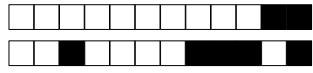
$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

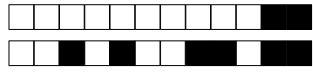
VRAI FAUX

Question 28 : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Alors

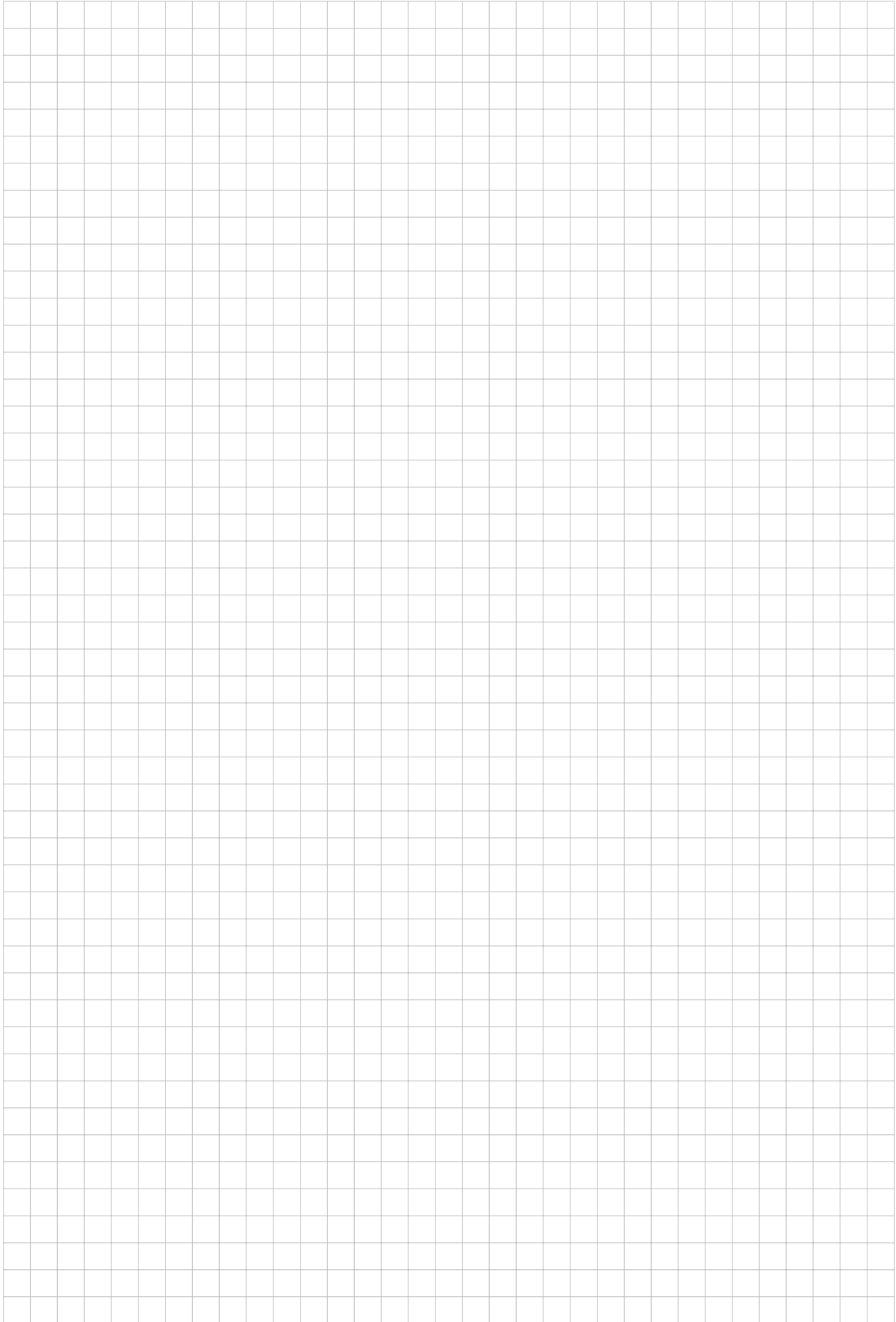
$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0.$$

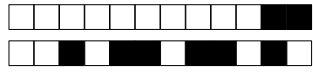
VRAI FAUX



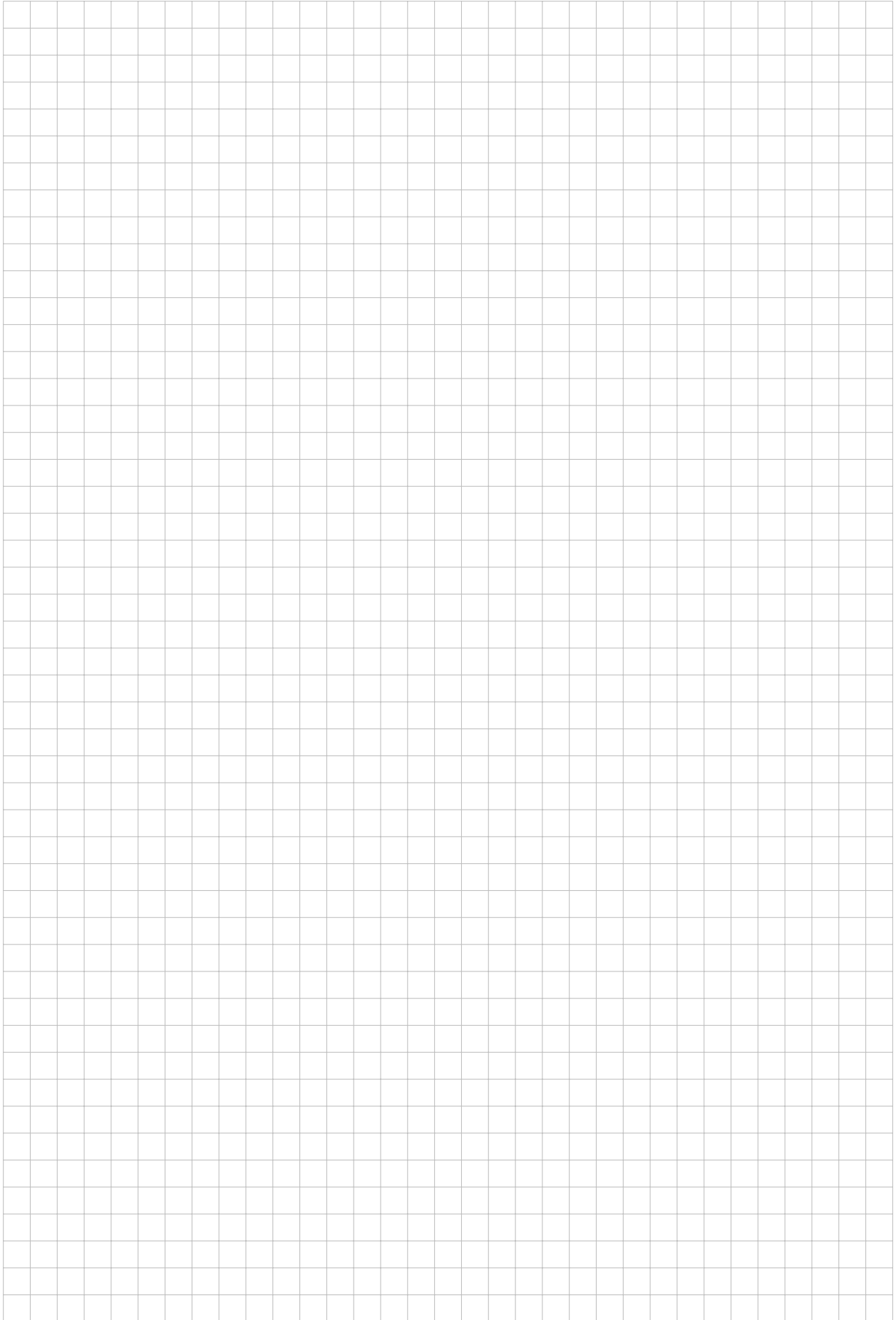


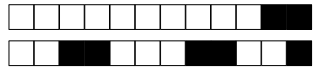
+3/10/27+



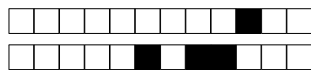


+3/11/26+





+3/12/25+



Ens: S. Deparis
Analyse I - XYZ
17 janvier 2022
3 heures













4

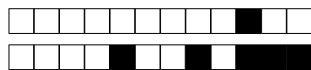
Starr Ringo

SCIPER: XXXXX4

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages (les dernières pouvant être vides), et 30 questions. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - +3 points si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
 - +1 point si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes Read these guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
		
		

**Première partie, questions à choix multiple**

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5x^2 - 10x - 15}{x^2 - x - 6} & \text{si } x > 3, \\ a & \text{si } x = 3, \\ bx^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x < 3. \end{cases}$$

Alors f est continue sur $[0, +\infty[$ pour:

- $a = 4, b = 3$ $a = 0, b = -\frac{1}{9}$ $a = 5, b = \frac{4}{9}$ $a = 4, b = \frac{1}{3}$

Question 2 : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $a_n = e^{-n} e^{n^2 \ln(1 + \frac{1}{n})}$. Alors:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = e$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{e}}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$

Question 3 : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par

$$a_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}.$$

Alors :

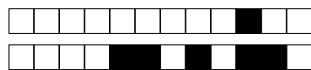
- $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$
 $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -1$, et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sqrt{3} - \sqrt{2}$
 $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$
 $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -1$, et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

Question 4 : Soit $A = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } y = e^{-x}\}$. Alors

- $\inf A = 1$ $\sup A = e$
 $\sup A = 1$ A n'est pas majoré

Question 5 : L'intégrale généralisée $\int_0^{1-} \frac{1}{1-x} dx$

- diverge converge et vaut 0
 converge et vaut 1 converge et vaut -1



Question 6 : Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $x_0 = 3$ et, pour $n \geq 1$, $x_n = \frac{3}{4}x_{n-1} + 2$. Alors:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 2$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 8$

$(x_n)_{n \geq 0}$ diverge

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 3$

Question 7 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable sur \mathbb{R} , telle que $\forall x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{x \sin(x)}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}.$$

Alors:

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = +\infty$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{2}$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 2$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0$

Question 8 : Le développement limité d'ordre deux de la fonction $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$ autour de $x_0 = 0$ est:

$f(x) = \frac{5}{2} + 2x + 4x^2 + x^2\varepsilon(x)$

$f(x) = e + ex + 3e^2x^2 + x^2\varepsilon(x)$

$f(x) = e + ex + \frac{3}{2}e^2x^2 + x^2\varepsilon(x)$

$f(x) = \frac{5}{2} + 2x + 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$

Question 9 : L'intégrale $\int_1^2 \frac{1}{x(x^2 + 3)} dx$ vaut:

$\frac{1}{3} \ln(2) - \frac{1}{9} \ln\left(\frac{7}{4}\right)$

$\ln(4) + \ln\left(\frac{7}{2}\right)$

$\frac{1}{3} \ln(2) - \frac{1}{6} \ln\left(\frac{7}{4}\right)$

$\ln(2) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(2)$

Question 10 : Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + \sin(x)$, et soit $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sa fonction réciproque. Alors au point $y_0 = f(\pi)$:

$(f^{-1})'(y_0) = -\frac{1}{3}$

$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{2\pi - 1}$

$(f^{-1})'(y_0) = 1$

f^{-1} n'est pas dérivable

Question 11 : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ la suite de nombres réels définie par $a_n = \frac{(-2)^n (n!)^2}{(2n)!}$. Alors la série

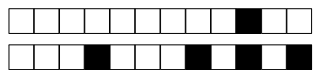
numérique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est:

divergente car $|a_n| \rightarrow +\infty$

absolument convergente

divergente car $|a_n| \rightarrow 1$

convergente mais pas absolument convergente



Question 12 : Soit $I = [-3, 0]$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 3e^{\frac{x+3}{3}} - 2$. Alors pour tout $x, y \in I$ tels que $x < y$ on a :

$1 \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 3$

$2 \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq e$

$-\infty < \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 0$

$3 \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 3e$

Question 13 : Soit $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^x \cos(x)$. Alors l'ensemble image de f est égal à

$[0, \frac{\sqrt{2}}{2} \exp(\frac{\pi}{4})]$

$]0, 1]$

$[0, 1]$

$]0, \exp(\frac{\pi}{4})]$

Question 14 : Soit $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^3\varepsilon(x)$ le développement limité d'ordre trois de la fonction $f(x) = e^{\sin(x)}$ autour de $x_0 = 0$. Alors a_3 est égal à :

$\frac{1}{6}$

0

1

$\frac{1}{2}$

Question 15 : Soit $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = \sum_{n=2}^{\infty} t^n$. Alors :

$f'(\frac{1}{2}) = 0$

$f'(\frac{1}{2}) = 7$

$f'(\frac{1}{2}) = 3$

$f'(\frac{1}{2}) = -5$

Question 16 : L'intégrale $\int_0^{\pi/2} e^{\sin(x)} \cos(x) dx$ vaut :

1

e

$e - 1$

0

Question 17 : La série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+4}} (x+1)^n$ converge si et seulement si $x \in I$, où :

$I =]\frac{1}{3}, \frac{5}{3}]$

$I = [-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}]$

$I =]-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}]$

$I =]-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}[$

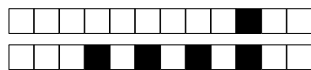
Question 18 : Soit $z = \frac{2i^9 - 4i^{15}}{1 - i}$. Alors :

$z^6 = 8 \cdot 3^6 i$

$z^6 = 8 \cdot 3^6 (1 + i)$

$z^6 = -8 \cdot 3^6 i$

$z^6 = 8 \cdot 3^6$



Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 19 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction infiniment dérivable, $n \in \mathbb{N}^*$, et $f(x) = p_n(x) + x^n \varepsilon(x)$ le développement limité de f d'ordre n autour de zéro, où $p_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ est un polynôme. Alors

$$f'(0) = p'(0), \quad f^{(2)}(0) = p_n^{(2)}(0), \quad f^{(3)}(0) = p_n^{(3)}(0), \quad \dots, \quad f^{(n)}(0) = p_n^{(n)}(0)$$

VRAI FAUX

Question 20 : Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(-1) = f(1)$. Alors il existe $x_0 \in]-1, 1[$ tel que $f'(x_0) = 0$.

VRAI FAUX

Question 21 : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

VRAI FAUX

Question 22 : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

VRAI FAUX

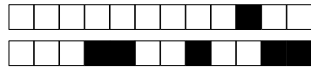
Question 23 : Il existe une fonction continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

VRAI FAUX

Question 24 : Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continûment dérivables, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Alors:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

VRAI FAUX



Question 25 : Il existe une fonction bijective et continue $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$.

VRAI FAUX

Question 26 : Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non-vidé, et soit $B = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$. Si A est majoré, alors B est majoré.

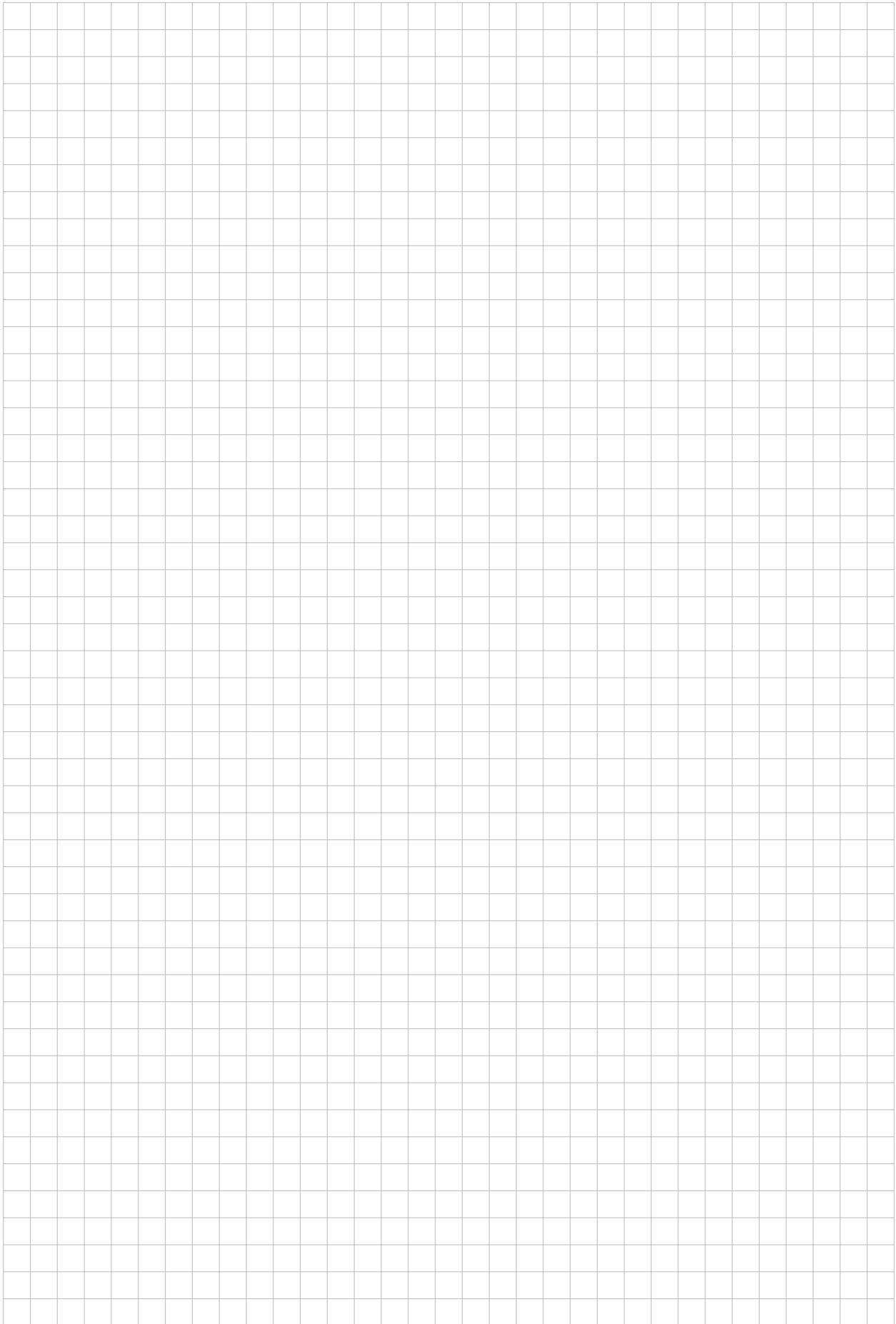
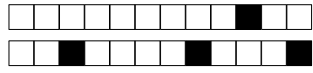
VRAI FAUX

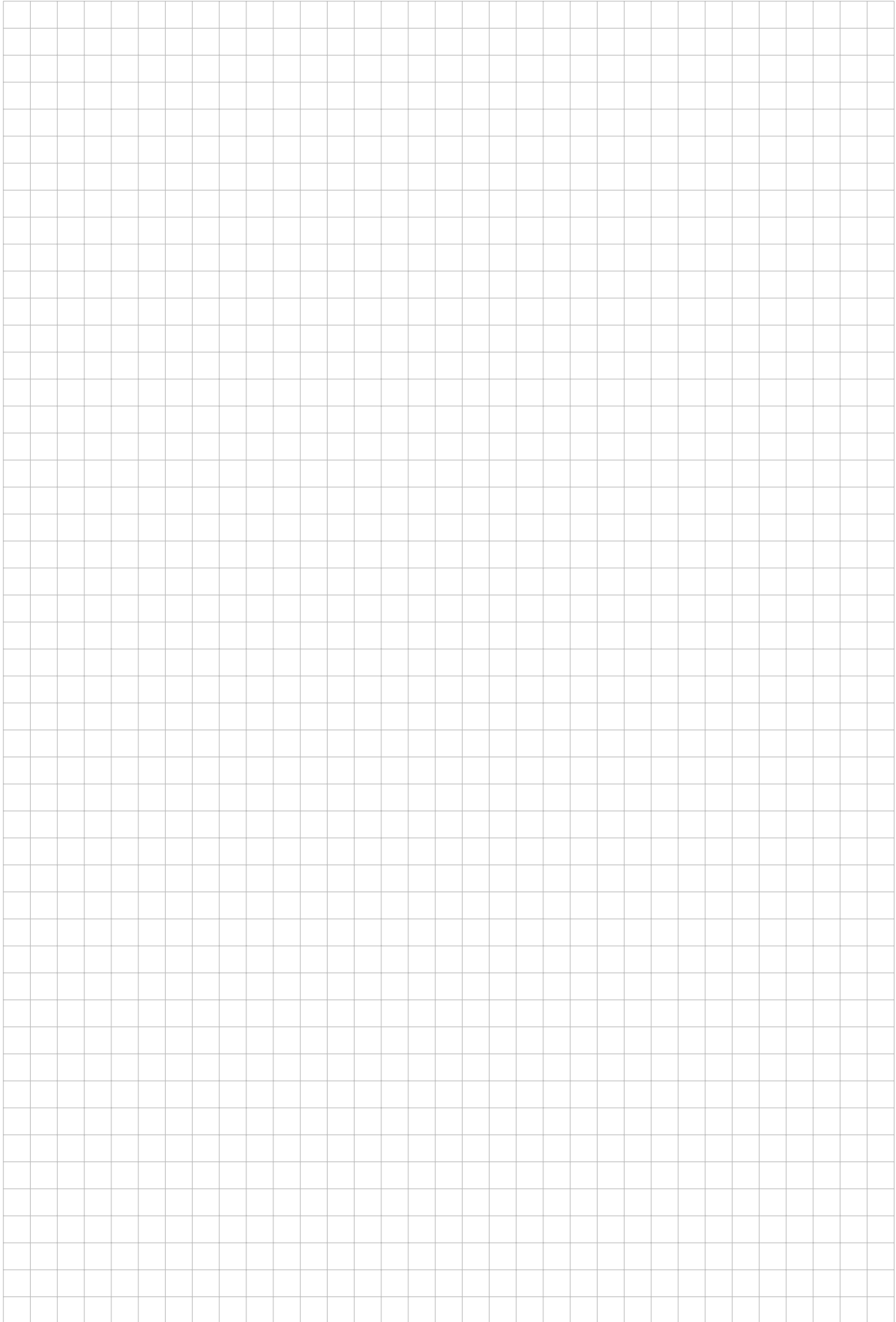
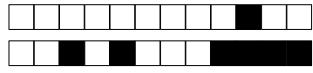
Question 27 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $(a_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy.

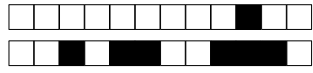
VRAI FAUX

Question 28 : Si la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-3)^k$ converge pour $x = 2.8$, alors elle converge aussi pour $x = 3.1$.

VRAI FAUX







+4/11/14+

