Anna Lachowska
décembre 2025

Analyse I

Résumé: Séries entières.

Définitions et résultats.

1. (Série entière). L'expression
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$
où $a_1, a_2, \ldots, x_0 \in \mathbb{R}$ et x est une variable réelle, est dite une série entière. L'ensemble $D := \{x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \text{ converge}\}$ est son domaine de convergence.

2. Théorème (Rayon de convergence).
Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ une série entière. Alors il existe r : $0 \le r \le \infty$ tel que
– la série converge absolument pour tout $x : |x - x_0| < r$,
– la série diverge pour tout $x : |x - x_0| > r$.

   Alors r est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$. La convergence de la série entière pour $x = x_0 \pm r$ doit être analysée séparément.

3. (Calcul du rayon de convergence).
Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ une série entière de rayon de convergence r.

   (a) Supposons que $a_k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et que $\lim\limits_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = l$ tel que $0 \le l \le \infty$. Alors $r = \frac{1}{l}$.

   (b) Supposons que $\lim\limits_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = l$ tel que $0 \le l \le \infty$. Alors $r = \frac{1}{l}$.
   (par convention on suppose que si $l = 0$, alors $r = +\infty$, et si $l = +\infty$, alors $r = 0$.)
   Remarque: on peur remplacer $\lim\limits_{k\to\infty}$ par $\limsup\limits_{k\to\infty}$.

4. (Série de Taylor).
Soit $f \in C^{\infty}(I, \mathbb{R})$ une fonction indéfiniment dérivable sur un intervalle ouvert I, et $x_0 \in I$. Alors
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$
est la série de Taylor de f au point x_0.
Si $x_0 = 0$, la série
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$
est dite la série de MacLaurin de f.

5. (Primitive d'une fonction définie par une série entière).
Soit $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k$ une fonction définie par la série entière.

(a) Les deux séries $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}$ ont le même rayon de convergence r.

(b) Si $r>0$, alors $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$ est continue sur $]x_0-r, x_0+r[$.

(c) Si $r>0$, alors $F(x)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}$ est la primitive de $f(x)$ sur $]x_0-r, x_0+r[$, telle que $F(x_0)=0$.

6. (Dérivée d'une fonction définie par une série entière)
Les deux séries $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k(x-x_0)^{k-1}$ ont le même rayon de convergence r. Si $r>0$, alors $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ est continûment dérivable et $f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k(x-x_0)^{k-1}$ sur $]x_0-r, x_0+r[$.

7. Les séries entières $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k(x-x_0)^{k-1}$ ont le même rayon, mais pas forcément le même intervalle de convergence.

Séries de Taylor de quelques fonctions et leurs domaines de convergence.

1. $e^x=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

2. $\ln(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k$ pour tout $x\in]0,2]$.

3. $\ln(1+x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$ pour tout $x\in]-1,1]$.

4. $\displaystyle\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k=1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots$ pour tout $x\in]-1,1[$.

5. $\sin(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

6. $\cos(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

7. $\sinh(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\ldots$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

8. $\cosh(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}x^{2k}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

9. $\arctan(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}x^{2k+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$ pour tout $x\in[-1,1]$.

10. $(1+x)^m=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-(k-1))}{k!}x^k=1+mx+\frac{m(m-1)}{2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$ pour tout $x\in]-1,1[$, $m\in\mathbb{R}$.