

Analyse I – Série de révision Questions Ouvertes

Question 1. (6 pts)

i) (1 pt) Donner la définition d'une fonction dérivable en un point.

ii) (2 pts) Démontrer, en utilisant la définition donnée en *i)*, que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 1 \\ \sqrt{x-1}, & x > 1 \end{cases}$$

n'est pas dérivable en $x = 1$. Justifier toutes les étapes de votre argument.

iii) (3 pts) Trouver toutes les valeurs de $m \in \mathbb{Q}$, $m \neq 0$, telles que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} (1-x)^m, & x \leq 1 \\ (x-1)^m, & x > 1 \end{cases}$$

soit dérivable en $x = 1$.

Question 2. (5 pts)

Soit (a_n) , $n \in \mathbb{N}^*$ une suite de nombres naturels telle que :

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $a_n = 2^{n-1} + 1$.

Justifier toutes les étapes de votre argument.

Question 3. (6 pts) Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ la suite de Fibonacci:

$$x_0 = x_1 = 1, \quad x_{n+2} = x_n + x_{n+1}.$$

Démontrer que

i) (3 pts) $x_n \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par récurrence)

ii) (3 pts) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Justifier toutes les étapes de votre argument.

Question 4. (6 pts) Soit $f : [-2, 2] \rightarrow [-1, 1]$ une fonction continue.

i) (2 pts) Démontrer que l'équation $2f(x) = x$ possède au moins une solution sur $[-2, 2]$. Justifier toutes les étapes de votre argument.

ii) (2 pts) Démontrer que l'équation $f \circ f(x) = x$ possède au moins une solution sur $[-2, 2]$. Justifier toutes les étapes de votre argument.

- iii) (2 pts) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ donner un exemple d'une fonction continue $f_k : [-2, 2] \rightarrow [-1, 1]$ telle que $2f_k(x) \neq x$ pour tout $x \in [-2, 2 - \frac{1}{k}]$.

Question 5. (5 pts) Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ donnée par la formule

$$f(x) = (x^2 - 4x + 6)e^x - 2x.$$

- i) (3 pts) Démontrer, en utilisant un résultat du cours, que pour tout $a < b$, $a, b \in [-2, 1]$, on a

$$f(b) - f(a) \leq (e - 2)(b - a).$$

Justifier toutes les étapes de votre argument.

- ii) (2 pts) Démontrer, en utilisant un résultat du cours, que pour tout $a < b$, $a, b \in [-2, 1]$, on a

$$f(b) - f(a) > 2(a - b).$$

Justifier toutes les étapes de votre argument.

Question 6. (9 pts) Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série convergente.

- i) (2 pts) Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1.$$

Justifier toutes les étapes de votre argument.

- ii) (3 pts) Est-ce que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ est nécessairement convergente? Si oui, justifiez votre réponse. Si non, donnez un contre-exemple.
- iii) (4 pts) Donner un exemple d'une suite $(b_n)_{n \geq 2}$ de nombres réels positifs, telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, mais la série $\sum_{n=2}^{\infty} (b_n)^p$ est divergente pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Question 7. (2 pts)

Donner un exemple d'un nombre complexe z tel que les deux conditions sont simultanément satisfaites:

- i) $\text{Im}(z) \neq 0$,
- ii) $e^z \in \mathbb{R}$.

Question 8. (2 pts)

Donner un exemple d'une suite des nombres réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que les trois conditions sont simultanément satisfaites:

- i) la suite (a_n) est bornée,
- ii) la suite (a_n) est divergente,
- iii) $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 9. (1 pt)

Donner un exemple de fonction continue $f :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ qui a une asymptote verticale, mais pas d'asymptote horizontale. La réponse doit être une expression.

Question 10. (1 pt)

Donner un exemple de fonction continue $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que l'intégrale généralisée $\int_{0+}^1 f(x) dx$ est divergente. La réponse doit être une expression.

Question 11. (8pts)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par la formule $f(x) = \sqrt{1 + 2 \cos^2(x)}$.

- i)* (2 pt) La fonction f est-elle périodique? Si oui, trouver la plus petite période de f .
- ii)* (2 pt) Calculer la dérivée $f'(x)$ et trouver son domaine de définition.
- iii)* (4pts) Trouver les points critiques de $f(x)$ dans \mathbb{R} et déterminer leur nature. Justifier votre réponse.

Question 12. (2pts) Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $c < d \in \mathbb{R}$. Soit $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ une fonction bijective et continue. Quelles sont les valeurs possibles de $f(a) \in [c, d]$? Justifier votre réponse.

Question 13. (6pts)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par la formule $f(x) = \sqrt{1 + 2 \cos^2(x)}$.

- i)* (2 pt) Trouver le plus grand intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tel que $\frac{\pi}{4} \in [a, b]$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est injective.
- ii)* (2 pt) Soit $[a, b]$ l'intervalle trouvé dans la partie 1 de cette question. Trouver la fonction réciproque f^{-1} de $f(x)$ sur $[a, b]$ et son domaine de définition.
- iii)* (2 pt) Soit $f^{-1}(x)$ la fonction réciproque de $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ trouvée dans la partie 2 de cette question. Trouver t dans le domaine de définition de f^{-1} tel que

$$(f^{-1})'(t) = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{4})}.$$

Question 14. (7pts)

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x + 1)^2 e^x$.

- i)* Trouver tous les points d'extremums locaux de f et déterminer leur nature.
- ii)* Déterminer les intervalles de monotonie de f .
- iii)* Trouver tous les points d'inflexion de f .
- iv)* Déterminer les intervalles de convexité de f .
- v)* Déterminer l'ensemble image de f .

Justifier vos réponses.

Question 15. (7pts)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2(\mathbb{R})$.

- i)* Citer le théorème des accroissements finis.
- ii)* Supposons que $|f'(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Démontrer, en utilisant le théorème des accroissements finis, que $|f(b) - f(a)| \leq |b - a|$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$.
- iii)* Supposons que $f(0) = 0$, $f(5) = 1$ et $f(10) = 2$. Démontrer qu'il existe un point $c \in]0, 10[$ tel que $f''(c) = 0$. Montrer toutes les étapes de votre raisonnement.

Question 16. (8pts)

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 2}.$$

- i)* Calculer la fonction dérivée $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- ii)* Trouver les points stationnaires de f , s'il y en a.
- iii)* Déterminer les intervalles des croissance et décroissance de f et les extremums locaux, s'il y en a.
- iv)* Calculer $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- v)* Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- vi)* Déterminer l'ensemble image $f(] - \infty, \infty[)$.

Question 17. (4pts)

Démontrer par récurrence que pour tout $x \geq -1$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ on a

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Question 18. (4pts)

Soit $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction donnée par la formule $f(x) = \sqrt{1 + 4 \sin^2(x)}$.

- i)* Démontrer que f est injective sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et trouver l'intervalle $[a, b] = f([0, \frac{\pi}{2}])$.
- ii)* Soit $f^{-1} : [a, b] \rightarrow [0, \frac{\pi}{2}]$ la fonction réciproque et $c = f(\frac{\pi}{4})$. Calculer $(f^{-1})'(c)$.