

Analyse I – Série 14

Exercice 1. (Intégration par parties)

Objectif: Calculer les intégrales données par intégration par partie.

Théorie nécessaire: Méthode d'intégration par parties, cours 25.

Calculer les intégrales suivantes :

$$i) \int x^2 \cos(x) dx$$

$$ii) \int e^{ax} \cos(bx) dx \quad (a \neq 0)$$

$$iii) \int \arctan(x) dx$$

$$iv) \int x 2^{-x} dx$$

$$v) \int \frac{x dx}{\sin^2(x)}$$

$$vi) \int \frac{\ln(x) dx}{x^3}$$

$$vii) \int e^{\sqrt{x}} dx$$

$$viii) \int \sin(\ln(x)) dx$$

$$ix) \int x^3 e^{-x^2} dx$$

$$x) \int \frac{\sin^2(x)}{e^x} dx$$

Exercice 2. (Intégrales récurrentes)

Objectif: Trouver la formule récurrente par intégration par partie.

Théorie nécessaire: Méthode d'intégration par parties, cours 25.

Déduire une formule de récurrence pour les intégrales suivantes ($n \in \mathbb{N}$) :

$$i) \int x^n \sin(2x) dx$$

$$ii) \int (\ln x)^n dx$$

Exercice 3. (Fonctions rationnelles)

Objectif: Calculer les intégrales des fonctions rationnelles.

Théorie nécessaire: Méthodes d'intégration des fonction rationnelles, cours 25.

Calculer les intégrales suivantes :

$$i) \int \frac{1}{x^2 - 1} dx$$

$$ii) \int \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx$$

$$iii) \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx$$

$$iv) \int \frac{1}{x^2 + 2x} dx$$

$$v) \int \frac{3x - 2}{x^2 - 4x + 5} dx$$

$$vi) \int \frac{x^2 - 2}{x^3 - x^2} dx$$

$$vii) \int \frac{4x}{x^4 - 1} dx$$

Exercice 4. (Aire d'une surface plane)

Objectif: Trouver l'aire entre les courbes par intégration.

Théorie nécessaire: Méthodes d'intégration et exemples donnés aux cours 24, 25.

(i) Considerer la courbe

$$y = \frac{1}{x}, \quad x \in [1, a], \quad a > 1.$$

Trouver la valeur du paramètre a telle que l'aire du domaine entre la courbe et les droites $y = 0$, $x = 1$ et $x = a$, soit égale à 1.

(ii) Trouver l'aire de la région comprise entre les courbes

$$y = 2 - x^2 \quad \text{et} \quad y^3 = x^2.$$

Exercice 5. (Intégrales généralisées)

Objectif: Calculer les intégrales généralisées si elles convergent.

Théorie nécessaire: Méthodes de calcul des intégrales généralisées, cours 26.

Calculer les intégrales généralisées suivantes, si elles convergent.

$$i) \quad I = \int_{0+}^1 \frac{1}{x^p} dx, \quad p \in \mathbb{R}$$

$$ii) \quad I = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx, \quad p \in \mathbb{R}$$

$$iii) \quad I = \int_0^{1-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$iv) \quad I = \int_{0+}^{1/2} \frac{1}{x \ln(x)} dx$$

$$v) \quad I = \int_e^{\infty} \frac{\ln^2(x)}{x^2} dx$$

$$vi) \quad I = \int_{1+}^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$$

$$vii) \quad I = \int_0^{\infty} \sin(x) e^{-x} dx$$

$$viii) \quad I = \int_{0+}^{\infty} e^{-x}(1-x) \ln(x) dx$$

Exercice 6. (Fonctions hyperboliques)

Objectif: Expliquer le nom des fonction hyperboliques.

Théorie nécessaire: Calculer l'aire entre les courbes par intégration.

Soient $P = (x, y)$ et $Q = (x, -y)$ des points de l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$ ($x \geq 1$) et t l'aire de la région comprise entre l'hyperbole et les rayons OP et OQ (aire grise sur la figure ci-contre). Montrer que $x = \cosh(t)$ et $y = \sinh(t)$.

