

Analyse I – Série 13

Exercice 1. (Séries entières)

Objectif: Trouver les rayons et domaines de convergence des séries entières.

Théorie nécessaire: Méthodes et exemples donnés aux cours 22, 23.

Trouver les rayons et domaines de convergence des séries entières suivantes :

$$i) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{2k+1} \right)^{2k-1} x^k$$

$$ii) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(k+2) 3^k} (x-2)^k$$

$$iii) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(k+2)^2 3^k} (x-2)^k$$

$$iv) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(k+2)^3 3^k} (x-2)^k$$

Exercice 2. (Théorème de la moyenne)

Objectif: Utiliser le théorème de la moyenne pour estimer la valeur de l'intégrale donnée.

Théorie nécessaire: Théorème de la moyenne vu au cours 24.

Vérifier les deux inégalités

$$\frac{1}{54} < \int_0^1 \frac{e^{-2x}}{5+x^3} dx < \frac{1}{5}.$$

Exercice 3. (Primitives)

Objectif: Trouver les primitives des fonctions de base.

Théorie nécessaire: Formules et méthodes d'intégration données aux cours 24, 25.

Trouver des primitives pour les fonctions f suivantes :

$$i) f(x) = \sin(x)$$

$$ii) f(x) = \cos(x)$$

$$iii) f(x) = \tan(x)$$

$$iv) f(x) = e^x$$

$$v) f(x) = \sinh(x)$$

$$vi) f(x) = \cosh(x)$$

$$vii) f(x) = \ln(x)$$

$$viii) f(x) = \frac{1}{x}$$

$$ix) f(x) = (ax+b)^s \quad (s \neq -1, a \neq 0)$$

$$x) f(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$$

$$xi) f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$xii) f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$$

$$xiii) f(x) = \frac{1}{\tan(x)}$$

$$xiv) f(x) = xe^{x^2}$$

$$xv) f(x) = (ax^p + b)^s x^{p-1} \quad (s \neq -1, a, p \neq 0)$$

Exercice 4. (Changement de variable, I)

Objectif: Calculer les intégrales données.

Théorie nécessaire: Méthodes de changement de variables, cours 24, 25.

Trouver des primitives pour les fonctions f en utilisant le changement de variable $x = \varphi(u)$ indiqué :

$$i) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x = \sin(u) \qquad ii) f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x = \tan(u)$$

$$iii) f(x) = \frac{1}{e^x+1}, \quad x = \ln(t) \qquad iv) f(x) = x\sqrt{x-1}, \quad x = t^2+1$$

Exercice 5. (Intégrales indéfinies)

Objectif: Calculer les intégrales données.

Théorie nécessaire: Méthodes d'intégration données aux cours 24, 25.

Calculer les intégrales suivantes :

$$i) \int \frac{3x+4}{1+x^2} dx \qquad ii) \int \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)} dx \qquad iii) \int \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}} dx \qquad iv) \int \frac{\sinh(x)}{e^x+1} dx$$

$$v) \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx \qquad vi) \int \frac{\ln(2x)}{x \ln(4x)} dx \qquad vii) \int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}} dx \qquad viii) \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Exercice 6. (Changement de variable, II)

Objectif: Calculer les intégrales données.

Théorie nécessaire: Méthodes de changement de variables, cours 24, 25.

Calculer les intégrales définies suivantes :

$$i) \int_0^{\pi/2} \sin^5(x) dx \qquad ii) \int_2^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx \qquad iii) \int_{\pi^2/16}^{\pi^2/9} \cos(\sqrt{x}) dx$$

Exercice 7. (Intégrale définie)

Objectif: Calculer l'intégrale donnée.

Théorie nécessaire: Méthodes d'intégration données aux cours 24, 25.

Calculer l'intégrale

$$\int_0^{\pi^{1/33}} \sin(\sin(x^{33})) \cos(x^{33}) x^{32} dx .$$

Exercice 8 (V/F fonctions dérivables)

Objectif: Interpréter et évaluer les énoncés concernant les fonctions dérivables.

Théorie nécessaire: Etude des fonction, cours 21.

Soit $a < b \in \mathbb{R}$, et soit $f : [a, b] \rightarrow F$ une fonction de classe $C^\infty(]a, b[, F)$.

(Q1) Si $f(x)$ n'est pas strictement croissante sur $[a, b]$, alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) \leq 0$.

(Q2) S'il existe un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) \leq 0$, alors $f(x)$ n'est pas strictement croissante sur $[a, b]$.

(Q3) Si la fonction $f(x)$ change de monotonie dans $]a, b[$, alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

(Q4) Si $f'(c) = 0$ et $f''(c) > 0$ pour un $c \in]a, b[$, alors $f(x)$ admet un minimum local en $(c, f(c))$.

(Q5) Si $f'(c) = 0$ pour un $c \in]a, b[$, et f admet un maximum local en $(c, f(c))$, alors $f''(c) < 0$.

(Q6) Si $f'(c) = 0$ et $f''(c) = 0$ pour un $c \in]a, b[$, alors $(c, f(c))$ est un point d'inflexion de f .

(Q7) Si $(c, f(c))$ est un point d'inflexion pour un $c \in]a, b[$, alors $f'(c) = 0$.

(Q8) Si $f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$ et $f^{(n)}(c) \neq 0$ pour un $c \in]a, b[$ et un n impair, $n > 1$, alors $(c, f(c))$ est un point d'inflexion.

(Q9) Si $(c, f(c))$ est un point d'inflexion de f pour un $c \in]a, b[$, alors $f''(c) = 0$.

(Q10) Si $f'(x)$ est croissante sur $]a, b[$, alors $f(x)$ est convexe sur $]a, b[$.

(Q11) Si $f(x)$ est convexe sur $]a, b[$, alors $f''(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$.