

Analyse I – Série 12

Exercice 1. (Séries de Mac-Laurin)

Objectif: Trouver les séries de Mac-Laurin des fonctions données

Théorie nécessaire: Propriété et exemples des séries de Taylor et Mac-Laurin données aux cours 21, 22, 23

- (1) Vérifier que les fonctions suivantes sont indéfiniment dérivables sur leur domaine de définition.
- (2) Trouver la n -ième dérivée de chaque fonction.
- (3) Trouver la série de Mac-Laurin et le rayon de convergence de chaque fonction.

i) $f(x) = \sin(x)$

ii) $f(x) = \cos(x)$

iii) $f(x) = e^x$

iv) $f(x) = e^{-x}$

v) $f(x) = \operatorname{sh}(x)$

vi) $f(x) = \operatorname{ch}(x)$

vii) $f(x) = \ln(1+x)$

viii) $f(x) = \ln(1-x)$

ix) $f(x) = (1+x)^m, m \in \mathbb{R}$

Exercice 2. (Dérivées)

Objectif: Vérifier les identités données en utilisant les séries de Mac-Laurin

Théorie nécessaire: Propriété des séries entières données au cours 23

Vérifier les identités suivantes à l'aide des séries de Mac-Laurin :

i) $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

ii) $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$

iii) $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$

iv) $\frac{d}{dx}\ln(1+x) = \frac{1}{1+x}, \quad -1 < x < 1.$

Exercice 3. (Développements limités)

Objectif: Trouver les DL avec le reste des fonctions données

Théorie nécessaire: Méthodes et exemples proposées aux cours 21, 22

Déterminer le développement limité d'ordre 3 de f autour de $a = 0$ et donner le reste $R_3(x)$.

i) $f(x) = \sin(3x)$

ii) $f(x) = \ln(2+x)$

iii) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$

Exercice 4. (Composées, produits et sommes de développements limités)

Objectif: Trouver les DL des fonctions données

Théorie nécessaire: Opérations algébriques sur les DL et exemples données au cours 22

Trouver le développement limité d'ordre n autour de $a = 0$ de

i) $f(x) = \ln(\cos(x)), \quad n = 4$

ii) $f(x) = \exp(\sin(x)), \quad n = 4$

iii) $f(x) = \sqrt{1 + \sin(x)}, \quad n = 4$

iv) $f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)}, \quad n = 4$

v) $f(x) = e^{x^2}, \quad n \in \mathbb{N}$

vi) $f(x) = \ln(1+x-2x^2), \quad n = 4$

vii) $f(x) = \frac{x}{9+x^2}, \quad n \in \mathbb{N}$

Astuce: Dans *iv)*, décomposer la fonction en somme de deux fractions simples.

Exercice 5. (Séries entières)

Objectif: Trouver la série entière de la fonction donnée

Théorie nécessaire: Propriété et exemples des séries entières données aux cours 22, 23

Déterminer le développement en série entière de la fonction $f(x) = \frac{2}{3+4x}$ autour de a et déterminer l'intervalle de convergence pour

- i) $a = 0$ ii) $a = 2$

Exercice 6. (Séries de Taylor)

Objectif: Trouver les série de Taylor des fonction donnée et leurs domaines de convergence.

Théorie nécessaire: Méthodes données aux cours 22 et 23

Déterminer la série de Taylor de $f(x)$ autour de a et son domaine de convergence.

- i) $f(x) = e^{2x+1}$ avec $a = 0$, ii) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ avec $a = 2$.

Exercice 7. (Limites)

Objectif: Trouver les limites donnée en utilisant les DL des fonctions connus

Théorie nécessaire: Exemples vus aux cours 21 et 22

En utilisant des développements limités d'ordre convenable autour de 0, calculer les limites suivantes :

- i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} - \sin(x)}{x^5}$ ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin(x) - \cos(x) - 2x}{x - \ln(1+x)}$
- iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(\sin(x)) - \sin(x)^2}{x^6}$ iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \ln(e^x - 2x)}{x^3}$

Exercice 8. (Séries de Mac-Laurin)

Objectif: Calculer les premiers termes de la série de Mac-Laurin des fonctions données.

Théorie nécessaire: Exemples des séries de Taylor et Mac-Laurin vus aux cours 21, 22

Trouver trois termes de la série de Mac-Laurin des fonctions suivantes :

- i) $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ ii) $f(x) = \tan(x)$
- iii) $f(x) = \arctan(x)$ iv) $f(x) = \sqrt{1 + \tan(x)}$

Exercice 9. (Etudes des fonctions)

Objectif: Etudier le comportement des fonctions utilisant les dérivées.

Théorie nécessaire: Propriété des fonctions discutées aux cours 20 et 21.

Etudier les fonctions suivantes et esquisser leurs graphes (points stationnaires, extremums, convexité, points d'inflexion, asymptotes) :

- i) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ ii) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$

iii) $f(x) = \frac{x+2}{e^x}$.

Exercice 10. (V/F : Limites des quotients)

Objectif: Interpréter et évaluer les énoncés concernant les limites des quotients des deux fonctions

Théorie nécessaire: Théorème de Bernoulli-L'Hospital et exemples donnée au cours 20

Soient $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables sur \mathbb{R} avec $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Q1: Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$, alors $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Q2: Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'existe pas, alors $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ n'existe pas.

Q3: Si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, et la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.