

## Analyse I – Série 10

**Exercice 1.** (V/F: Continuité sur un intervalle)

**Objectif:** Interpréter et évaluer les énoncés concernant les fonctions continues sur un intervalle

**Théorie nécessaire:** Définitions et propriétés données au cours 17 et 18

Soient  $I$  un intervalle,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $f(I)$  l'image de  $I$  par  $f$ .

Q1:  $f(I)$  est un intervalle.

Q2: Si  $I$  est borné et fermé, alors  $f(I)$  est borné et fermé.

Q3: Si  $I$  est borné, alors  $f(I)$  est borné.

Q4: Si  $I$  est ouvert, alors  $f(I)$  est ouvert.

Q5: Si  $I$  est borné, alors  $f$  atteint son minimum et son maximum sur  $I$ .

Q6: Si  $I = [a, b[$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , alors  $f$  atteint soit son minimum soit son maximum sur  $I$ .

Q7: Si  $I = [a, \infty[$  avec  $a \in \mathbb{R}$ , alors  $f$  atteint soit son minimum soit son maximum sur  $I$ .

Q8: Si  $f$  est strictement croissante et  $I$  est ouvert, alors  $f(I)$  est ouvert.

**Exercice 2.** (Prolongement par continuité)

**Objectif:** Etudier la possibilité de prolongement par continuité des fonctions données

**Théorie nécessaire:** Définition du prolongement par continuité et propriétés des limites vues au cours 15, 17

Trouver, s'il existe, le prolongement par continuité de la fonction  $f$  au point  $x_0$ , ou alors montrer que  $f$  ne peut être prolongée par continuité en  $x_0$ .

Q1:  $f: [0, 1[ \cup ]1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{3}}$  en  $x_0 = 1$

Q2: Soit  $A = \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^{-1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ .  
 $f: ]0, 1] \setminus A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \tan\left(\frac{1}{x}\right) \left(1 - \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\right)$  en  $x_0 \in A \cup \{0\}$

Q3:  $f: ]1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x(x-1)\tan(x-1)}{x^3 - 3x + 2}$  en  $x_0 = 1$

**Exercice 3.** (Propriétés de la dérivée)

**Objectif:** Démontrer les propriétés des dérivées des fonctions

**Théorie nécessaire:** Définition de la dérivée donnée au cours 18

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable. Montrer que

Q1:  $f$  paire  $\Rightarrow f'$  impaire,

Q2:  $f$  impaire  $\Rightarrow f'$  paire,

Q3:  $f$  périodique  $\Rightarrow f'$  périodique.

**Exercice 4.** (Calcul des dérivées)

**Objectif:** Calculer les dérivées des fonctions données.

**Théorie nécessaire:** Définition et propriétés des dérivées donnée aux cours 18, 19.

Calculer la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  et donner les domaines de  $f$  et  $f'$ .

$$i) f(x) = \frac{5x+2}{3x^2-1} \quad ii) f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \quad iii) f(x) = (\sin(x))^2 \cdot \cos(x^2)$$

$$iv) f(x) = \tan(x) \quad (\text{sans formulaire!}) \quad v) f(x) = \sqrt{\sin(\sqrt{\sin(x)})}$$

$$vi) f(x) = \sqrt[5]{(2x^4 + e^{-(4x+3)})^3} \quad vii) f(x) = \log_3(\log_2(x))$$

$$viii) f(x) = \ln(4^{\sin(x)})e^{\cos(4x)} \quad ix) f(x) = \frac{3^x \cos(x)}{2\sqrt{x^2+1}}$$

**Exercice 5.** (Dérivabilité)

**Objectif:** Etudier l'existence et continuité de la dérivée des fonctions qui dépendent d'un paramètre.

**Théorie nécessaire:** Propriétés des dérivées données aux cours 18, 19.

Déterminer toutes les valeurs de l'entier  $m$  pour lesquelles la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  admet une dérivée au point  $x = 0$ .

Pour lesquelles de ces valeurs  $m$  la dérivée  $f'$  est-elle continue au point  $x = 0$ ?

$$i) f(x) = \begin{cases} \sin(x^m), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad ii) f(x) = \begin{cases} x^m \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

**Exercice 6.** (Dérivabilité)

**Objectif:** Etudier l'existence et continuité de la dérivée des fonctions qui dépendent des paramètres.

**Théorie nécessaire:** Propriétés des dérivées données aux cours 18, 19.

(a) Déterminer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  soit dérivable partout, où :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3, & x \leq 1 \\ \alpha x + \beta, & x > 1 \end{cases}$$

(b)\* Déterminer  $\alpha \in \mathbb{Z}, \beta \in \mathbb{R}$  tels que la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  soit dérivable partout, où :

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ \beta, & x = 0 \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de  $\alpha \in \mathbb{Z}, \beta \in \mathbb{R}$  la dérivée est-elle continue en  $x = 0$ ?

**Exercice 7.** (Dérivée d'une composée des fonctions)

**Objectif:** Calculer les dérivées des fonctions composées.

**Théorie nécessaire:** Propriétés des dérivées donnée aux cours 18, 19.

Calculer  $(g \circ f)'(0)$  pour les fonctions  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

Q1:  $f(x) = 2x + 3 + (e^x - 1) \sin(x)^7 \cos(x)^4$  et  $g(x) = \ln(x)^3$ .

Q2:  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) + 2x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  et  $g(x) = (x - 1)^4$ .

**Exercice 8.** (V/F : Dérivation)

**Objectif:** Interpréter et évaluer les énoncés concernant la dérivabilité des fonctions

**Théorie nécessaire:** Définitions et propriétés données au cours 18 et 19

Soient  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions.

Q1: Si  $f$  est dérivable en  $a \in \mathbb{R}$ , alors il existe  $\delta > 0$  tel que  $f$  est continue sur  $]a - \delta, a + \delta[$ .

Q2: Si  $f$  est dérivable à gauche et à droite en  $a \in \mathbb{R}$ , alors  $f$  est dérivable en  $a$ .

Q3: Si  $f$  est dérivable sur  $I \subset \mathbb{R}$ , alors  $f'$  est continue sur  $I$ .

Q4: Si  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , alors  $g(x) = \sqrt{f^2(x)}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Q5: Si  $f$  est bijective et dérivable sur un intervalle  $I$  avec la dérivée  $f'(x) \neq 0$ , alors la fonction réciproque  $f^{-1}$  est aussi dérivable sur  $I$  et  $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(x)}$ .

Q6: Si  $f(x) = x + e^x$ , alors  $(f^{-1})'(1) = 1 + \frac{1}{e}$ .

Q7: Si  $f(x)$  est dérivable en  $x = x_0$ , alors  $(f \circ f)(x)$  est aussi dérivable en  $x = x_0$ .

Q8: Si  $f$  est dérivable pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , et  $f'(a) = 0$ , alors  $(f \circ f \circ f \circ f \circ f)'(a) = 0$ .