Anna Lachowska

Analyse I – Série 8

Exercice 1. (Convergence des séries)

Objectif: Appliquer les critères de convergence pour déterminer si les séries convergent ou divergent

Théorie nécessaire: Critères de convergences proposés au cours 11

Déterminer si la série donnée converge ou diverge :

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{2n+1}$ *ii)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$ *iii)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$

iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n+1}$ *v)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{(n-1)!}$ *vi)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{n^n}$

vii) Trouver toutes les valeurs du paramètre $p \in \mathbb{N}^*$ telles que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(pn)!}$ converge.

Exercice 2. (Domaine, parité, périodicité)

Objectif: Etudier les propriétés des fonctions données

Théorie nécessaire: Définitions des propriétés des fonction données au cours 12

Donner le domaine et étudier la parité et la périodicité des fonctions f suivantes en donnant la période le cas échéant :

i) $f(x) = \dfrac{x^4\cos(3x)}{1+\sin(x)^2}$ *ii)* $f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\left(\frac{1}{3}x\right)$

iii) $f(x) = (x-[x])^2$, où $[x]$ est la partie entière du nombre réel x (c.-à-d. $[x] \in \mathbb{Z}$ tel que $[x] \leq x < [x]+1$).

iv) $f(x) = x\sin x^2 + x^2\sin(x)$ *v)* $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{1-\sqrt{x^2-3}}$.

Exercice 3. (Fonctions monotones)

Objectif: Déterminer si la fonction composée est monotone

Théorie nécessaire: Définition de la monotonie des fonction donnée au cours 12

Soient les fonctions $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Déterminer la monotonie de leur composée $g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si

i) f et g sont croissantes,

ii) f et g sont décroissantes,

iii) f est croissante et g est décroissante. Considérer les deux cas, $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 4. (Fonctions bijectives et réciproques) **Objectif:** Etudier la bijectivité des fonctions et construire les fonctions réciproques
Théorie nécessaire: Définitions et exemples donnés dans le cours 12

i) Soient les fonctions $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to A$ telles qu'on ait pour tout $x \in A$ que $(g \circ f)(x) = x$ et pour tout $y \in B$ que $(f \circ g)(y) = y$. Montrer que f est bijective et que $g = f^{-1}$.

ii) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire. Montrer que si f est bijective, alors sa fonction réciproque est aussi impaire.

iii) Soit $f(x) = \sqrt{x+3} - 2$. Trouver le plus grand domaine où la fonction est bijective. Calculer la fonction réciproque et son domaine de définition.

iv) Soit $f(x) = \cos(x^2 + 1)$. Trouver un plus grand domaine où la fonction est bijective. Calculer la fonction réciproque et son domaine de définition. Astuce: par convention, la fonction $\mathrm{Arccos}(y),\ y \in [-1, 1]$ est réciproque à la fonction $\cos(x),\ x \in [0, \pi]$.

Exercice 5. (Transformations des graphiques)

Objectif: Obtenir les graphiques des fonctions à partir des graphiques des fonctions connues
Théorie nécessaire: Transformations des graphiques discutées dans le cours 1
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction représentée à la page 4. Tracer sur la même figure les graphiques des fonctions $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

i) $g(x) = f(-x)$ *ii*) $g(x) = f(x-5)$ *iii*) $g(x) = f(2x)$

iv) $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$

Exercice 6. (Composition des fonctions)

Objectif: Calculer les fonctions composée
Théorie nécessaire: Définition d'une fonction composée donnée au cours 12
Pour les deux fonctions $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies ci-dessous, calculer $f \circ g$ et $g \circ f$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ x + 2, & x < 1 \end{cases}$$

Exercice 7. (V/F : Propriétés des fonctions)

Objectif: Interprêter et évaluer les énoncés concernant les propriétés des fonctions
Théorie nécessaire: Définitions et propriétés données au cours 12
Soient $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

Q1 : Si f est strictement monotone, alors f est injective.

Q2 : Si f est injective, alors f est monotone.

Q3 : Si f est bijective et croissante, alors son inverse f^{-1} est décroissante.

Q4 : Si f est bijective et f^{-1} est décroissante, alors f est aussi décroissante.

Q5 : Si $f + g$ est décroissante, alors f et g sont décroissantes.

Q6 : Si $f \cdot g$ est décroissante, alors f et g sont décroissantes.

Exercice 8.(Limites des foncions à partir de la définition)

Objectif: Démontrer les limites à partir de la définiion et par le critère des suites
Théorie nécessaire: Définition de la limite et la caractérisation de la limite à partir des suites donnée au cours 13
Démontrer les limites suivantes à partir de la définition de la limite (a) avec $\varepsilon - \delta$, (b) à partir des suites.

Q1 : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{2x^2 + 1} = 1$

Q2 : $\lim\limits_{x \to a} x^3 = a^3$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Q3 : $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ pour tout $a > 0$.

Astuce: Pour (a) il faut ce donner un $\varepsilon > 0$ et trouver $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $x : 0 < |x - x_0| \leq \delta$, on a $|f(x) - l| \leq \varepsilon$. Pour (b), il faut se donner une suite arbitraire (a_n) telle que $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = x_0$, et démontrer que $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = l$.

Complément à l'Exercice 5.