Anna Lachowska
9 octobre 2025

Analyse I – Série 5

Exercice 1. (V/F : Limites des suites)

Objectif: Interpréter et évaluer les énoncés concernant la convergence des suites
Théorie nécessaire: Définitions et propriétés données au cours 7, 8
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels.

Q1 : Si (a_n) est bornée, alors (a_n) converge.

Q2 : Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \big(a_n \sin(n)\big) = 0$.

Q3 : Si $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, alors (a_n) diverge.

Q4 : Si (a_n) converge, il existe $\epsilon > 0$ tel que $|a_n| \le \epsilon$ pour tout n.

Q5 : Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, alors il existe $\delta > 0$ tel que $|a_n - a| \le \delta$ pour tout n.

Q6 : Si $(a_n + 3b_n)$ converge, alors (a_n) converge et (b_n) converge.

Q7 : Si $(a_n + 3b_n)$ converge, alors au moins une des deux suites (a_n) et (b_n) est convergente.

Q8 : Si $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, alors la suite $(a_n b_n)$ converge.

Q9 : Si $(a_n b_n)$ converge et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l \neq 0$, alors (b_n) converge.

Q10 : Si (a_n) et (b_n) convergent, alors la suite $(|a_n| - |b_n|)$ converge aussi.

Q11 : Si $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ converge, alors $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$

Q12 : Si $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ diverge et (a_n) converge, alors soit (b_n) diverge, soit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Q13 : Si $(a_n b_n)$ diverge, alors soit (a_n) converge et (b_n) diverge, soit (a_n) diverge et (b_n) converge.

Intermezzo.

Les informations suivantes seront utiles pour les exercices qui suivent:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0\,,$ pour tout $p > 0$.

2) $1 \le \sqrt{1+x} \le 1 + \frac{1}{2}x\,,$ pour tout $x \ge 0$.

3) $1 + x \le \sqrt{1+x} \le 1 + \frac{1}{2}x\,,$ pour $-1 \le x \le 0$.

 Tourner la page svp.

Démonstration:
1) (Voir les notes du cours). Il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n^p} \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. On peut par exemple choisir

$$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}} \ ,$$

car on trouve pour $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n_0^p} < \varepsilon \ .$$

2) Pour $x \geq 0$ on a

$$1 \leq \sqrt{1+x} \leq \sqrt{1+x+\frac{1}{4}x^2} = 1 + \frac{1}{2}x \ .$$

3) Pour $-1 \leq x \leq 0$ on a $0 \leq 1+x \leq 1$ et donc $(1+x)^2 \leq 1+x$. Donc

$$1+x \leq \sqrt{1+x} \leq \sqrt{1+x+\frac{1}{4}x^2} = 1 + \frac{1}{2}x \ .$$

Exercice 2. (Existence des limites)

Objectif: Appliquer les méthodes connues et les inégalités données pour trouver les limites des suites, si elles existent
Théorie nécessaire: Propriétés des limites données au cours 7, 8
Déterminer, si elle existe, la limite $n \to \infty$ de la suite (a_n) avec

i) $a_n = \dfrac{5n^2 - 3n + 2}{3n^2 + 7}$ *ii)* $a_n = (-1)^n \dfrac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n}}$ *iii)* $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+2}}{2n}$

Exercice 3. (Calcul des limites)

Objectif: Appliquer les inégalités proposées pour trouver les limites données
Théorie nécessaire: Propriétés des limites et théorème de 2 gendarmes, voir cours 7, 8
Pour les limites qui contiennent sin, les informations suivantes seront utiles. Pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$ on a les inégalités suivantes:

$$0 < \sin(x) \leq x \leq \tan(x) \qquad \Rightarrow \qquad 1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)} \qquad \Rightarrow \qquad \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

$$\Rightarrow \qquad \cos(x)^2 \leq \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \leq 1 \qquad \Rightarrow \qquad 1 - \sin(x)^2 \leq \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow \qquad 1 - x^2 \leq \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \leq 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{1-x^2} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1 \ , \quad 0 < x < 1 \ .$$

Calculer

i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ *ii)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$ *iii)* $\lim_{n\to\infty} n \cdot \sin\left(\dfrac{2n+3}{n^3}\right)$

Exercice 4. (Calcul des limites par le théorème des deux gendarmes)

Objectif: Appliquer le théorème des deux gendarmes pour trouver les limites données
Théorie nécessaire: Propriétés des limites et théorème de deux gendarmes, voir cours 7
Calculer la limite lorsque $n \to \infty$ de la suite (a_n) avec

$$i)\ \ a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n} \qquad ii)\ \ a_n = \frac{n^2}{2^n} \qquad iii)\ \ a_n = \frac{n!}{n^n} \qquad iv)\ \ a_n = \frac{2^n}{n!}$$

Exercice 5. (Calcul des limites en utilisant $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$)

Objectif: Appliquer la limite remarquable pour calculer les limites données
Théorie nécessaire: Limite remarquable $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$
Calculer les limites suivantes :

$$i)\ \ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n \qquad ii)\ \ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \qquad iii)\ \ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$$

Exercice 6. (QCM : Définition de la limite)

Objectif: Interpréter et évaluer les propositions concernant l'existence de la limite
Théorie nécessaire: Définition de la limite
On a $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ si et seulement si
(i): Il existe $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n > n_0, n \in \mathbb{N}$, on a $|a_n - l| \leq \varepsilon$.

(ii): Pour tout $\xi > 0$, il existe un nombre naturel n_0 et une infinité des nombres naturels $n > n_0$ tels que $|a_n - l| \leq \xi$.

(iii): Quel que soit $x > 0$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > m, n \in \mathbb{N}$, on a $|a_n - l| \leq 2x$.

(iv): Soit $\varepsilon > 0$. Alors pour tout naturel $n > \frac{1}{\varepsilon}$, on a $|a_n - l| \leq \varepsilon$.

Exercice 7. (Limite des suites définies par récurrence)

Objectif: Trouver les limites des suites définies par récurrence
Théorie nécessaire: Propriétés des suites définies par récurrence données au cours 9

(1) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, et $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$x_{n+1} - l = \frac{1}{n+1}(x_n - l) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prouver que la suite (x_n) est monotone et bornée, donc convergente. Astuce: considerer les cas $x_0 < l, x_0 = l, x_0 > l$.

(2) Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suite, et $0 < a_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$x_{n+1} - l = a_n(x_n - l) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prouver que la suite (x_n) est monotone et bornée, donc convergente.