

Analyse I – Série 4

Exercice 1. (Raisonnement par récurrence)

Objectif: Appliquer la méthode de démonstration par récurrence

Théorie nécessaire: Méthode et exemples donnés dans le cours 6

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$i) \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ (progression arithmétique);}$$

$$ii) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ (somme de carrés d'entiers);}$$

$$iii) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \text{ (somme des inverses des produits de deux entiers successifs);}$$

$$iv) \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2 \text{ (somme de cubes d'entiers).}$$

$$v) \text{ Calculer } S = \sum_{k=0}^{1000} (k+1)(3k+2).$$

$$vi) \text{ Calculer } T = \sum_{k=1}^{476} (k^2 - (k-1)^2).$$

Exercice 2. (Raisonnement par récurrence)

Objectif: Appliquer la méthode de démonstration par récurrence en cas d'un produit de n termes

Théorie nécessaire: Méthode et exemples donnés dans le cours 6

Soit pour $n \in \mathbb{N}$ les nombres de Fermat $F_n := 2^{(2^n)} + 1$. Démontrer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la relation de récurrence

$$F_n = \prod_{k=0}^{n-1} F_k + 2.$$

Exercice 3. (Encore une somme)

Objectif: Trouver la formule qui dépend de n et la démontrer par récurrence

Théorie nécessaire: Méthode et exemples donnés dans le cours 6

Trouver une expression pour $\sum_{k=0}^n (a + kd)$ pour tout couple $a, d \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, et la démontrer par récurrence.

Exercice 4. (Binôme de Newton)

Objectif: Méthode de récurrence et manipulations avec des sommes, en particulier le changement d'indice dans une somme

Théorie nécessaire: Méthode de récurrence donnée dans le cours 6 et le fichier "changement d'indice" qui se trouve sur Moodle

Soit $k, n \in \mathbb{N}$, avec $0 \leq k \leq n$. On définit le coefficient binomial C_n^k par

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

i) Vérifier à partir de la définition des coefficients binomiaux que pour tout $n \geq k \geq 1$:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

ii) Montrer que pour tous les nombres x, y et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a la formule du binôme de Newton

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

iii) En déduire que

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

Exercice 5. (Nombres de Fibonacci)

Objectif: Méthode de récurrence et manipulations avec des sommes, en particulier le changement d'indice dans une somme

Théorie nécessaire: Méthode de récurrence donnée dans le cours 6 et le fichier "changement d'indice" qui se trouve sur Moodle

Les nombres de Fibonacci sont définis comme suit:

$$f_1 = f_2 = 1, \quad f_{n+2} = f_n + f_{n+1}.$$

Vérifier par récurrence la propriété des coefficients binomiaux

$$\sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k} = f_{n+1}.$$

(par convention on suppose que $\binom{p}{q} = 0$ si $q > p$). Astuce: Utiliser propriété i) de l'Exercice 4.

Exercice 6. (Infimum, supremum)

Objectif: Trouver l'infimum et le supremum d'un ensemble donné

Théorie nécessaire: Définition et exemples donnés à la fin du cours 2

Soit $a_n = \frac{5n}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Calculer

i) $\inf a_n$ ii) $\sup a_n$

Exercice 7. (Infimum, supremum)

Objectif: Trouver l'infimum et le supremum d'un ensemble donné

Théorie nécessaire: Définition et exemples donnés à la fin du cours 2

Déterminer si la suite (a_n) est monotone; trouver, s'il existe, le supremum et l'infimum et décider s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

$$i) a_n = n^2 - 4n + 1, \quad n \in \mathbb{N} \qquad ii) a_n = \frac{n}{3n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^* \qquad iii) a_n = \frac{n}{3n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Exercice 8. (Propriétés algébriques de la limite)

Objectif: Appliquer les transformations algébriques et les propriétés algébriques des limites pour trouver les limites données

Théorie nécessaire: Propriétés des limites discutées dans le cours 7

Soit $a_n = \frac{3n}{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \qquad ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \qquad iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{3} + \frac{3}{a_n} \right)$$