EPFL
Sections IN, SC

Anna Lachowska
25 septembre 2025

Analyse I – Série 3

Exercice 1. (V/F: Formule d'Euler)

Objectif: Interpréter et évaluer les énoncés sur les nombres complexes en utilisant la formule d'Euler
Théorie nécessaire: Formule d'Euler donnée au cours 4

$Q1: \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = i$ $\qquad Q2: \quad e^{-i\pi} = -1$ $\qquad Q3: \quad \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{i\pi}{4}}$

Exercice 2. (Forme polaire)

Objectif: Comprendre la relation entre la forme cartesienne et la forme polaire d'un nombre complexe
Théorie nécessaire: Définition de la forme polaire donnée au cours 4
Calculer le module des nombres complexes suivants :

i) e^{i+1} *ii)* $e^{-(i+1)}$ *iii)* $e^{-(i-1)}$ *iv)* $e^{(i-50)}$
v) $e^{(1-50i)}$ *vi)* $\cos(\pi/5) + i\sin(\pi/5)$

Exercice 3. (Partie réelle et partie imaginaire)

Objectif: Appliquer les transformations algébriques convenables pour trouver la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe
Théorie nécessaire: Propriétés des nombres complexes données au cours 4
Trouver la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

i) $(2-3i)(3+2i)$ *ii)* $\dfrac{2-3i}{3+2i}$ *iii)* $\left(\dfrac{1}{i}\right)^{19}$

iv) $(1-i\sqrt{3})^{10}$ *v)* $\dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{1+2i} + \dfrac{1}{1+3i}$ *vi)* $\dfrac{2-3i}{2+i} + \dfrac{1-i}{1+3i}$

vii) e^{6+3i} *viii)* $e^{2i} + e^{3i}$ *ix)* $(e^{1-3i})\left(\dfrac{1+i}{1-3i}\right)$

Exercice 4. (Module et argument)

Objectif: Appliquer les transformations algébriques convenables pour trouver le module et l'argument d'un nombre complexe
Théorie nécessaire: Propriétés des nombres complexes données au cours 4
Trouver le module et l'argument des nombres complexes suivants :

i) $2+2i$ *ii)* $-e^{i} + i\sqrt{3}$ *iii)* $-1 + i\tan(3)$

iv) $\dfrac{8i^{21} - 2i^{11}}{1-i}$ *v)* $e^{\pi+i\pi} + 1$ *vi)* $\sin(\pi/5) + i\cos(\pi/5)$

Exercice 5. (Racines de nombres complexes)

Objectif: Trouver des racines d'un nombre complexe
Théorie nécessaire: Formule de Moivre et proposition sur les racines des nombres complexes données au cours 5
Trouver toutes les solutions des équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

i) $z^5 = -1$ *ii)* $z^2 = -3 - 3i$ *iii)* $z^2 = 5 + 2\sqrt{6}i$ *iv)* $z^4 = -2i$
v) $z^3 = -\sqrt{3} + i$

Exercice 6. (Equations polynomiales)

Objectif: Appliquer les transformation algébriques et propriétés des nombres complexes pour résoudre des équations polynomiales
Théorie nécessaire: Théorème fondamental de l'algèbre et ses consequences données au cours 5
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

i) $z^2 + 6z + 12 - 4i = 0$ *ii)* $z^6 + 4z^3 + 2 = 0$

Exercice 7. (Encore une équation)

Objectif: Trouver des racines d'un nombre complexe
Théorie nécessaire: Proposition sur les racines des nombres complexes donnée au cours 5

Trouver la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument de tous les nombres complexes z qui satisfont l'équation

$$z^2 = \left(1 + \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^8 \ .$$

Exercice 8. (Décomposition d'un polynôme)

Objectif: Appliquer les transformation algébriques et propriétés des nombres complexes pour décomposer un polynôme
Théorie nécessaire: Théorème fondamental de l'algèbre et ses consequences données au cours 5
Décomposer le polynôme $z^6 + 8$ en produit de facteurs irréductibles complexes et en produit de facteurs irréductibles réelles.

Exercice 9. (Sous-ensembles de $\mathbb{C}$)

Objectif: Appliquer les transformation algébriques et propriétés des nombres complexes pour établir l'égalité des sous-ensembles
Théorie nécessaire: Exemples des sous-ensembles de nombres complexes donnés à la fin du cours 5
Démontrer l'égalité suivante :

$$\left\{ z \in \mathbb{C}\colon\ z \neq 0,\ z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \right\} = \{ z \in \mathbb{C}\colon\ z \neq 0 \text{ et } \operatorname{Im}(z) = 0, \text{ ou } |z| = 1 \} \ .$$

Exercice 10. (V/F : Nombres complexes)
Objectif: Interpréter et évaluer les énoncés concernant les nombres complexes
Théorie nécessaire: Formule de Moivre et propriétés des polynômes complexes données au cours 5

Q1 : Le polynôme z^2+1 divise $z^6+3z^4+z^2-1$.

Q2 : Soient $z_1, \dots, z_n$ les racines complexes du polynôme $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$. Alors on a $\prod_{j=1}^{n} z_j = (-1)^n a_0$.

Q3 : Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(2+2i\sqrt{3})^n$ soit réel.