

## Analyse I – Corrigé de la Série 2

### Remarque générale :

Les Exercices 1, 4 et 8 sont des questions de type Vrai ou Faux (V/F) – ce type de questions réapparaîtra tout au long du semestre. Pour chaque question, répondre par VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

### Exercice 1.

Q1: FAUX.

Prendre par exemple  $A = [0, 2]$  et  $B = [1, 3]$ . Dans ce cas on a

$$\mathbb{R} \setminus (A \cap B) = \mathbb{R} \setminus [1, 2]$$

et

$$(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B) = (\mathbb{R} \setminus [0, 2]) \cap (\mathbb{R} \setminus [1, 3]) = \mathbb{R} \setminus [0, 3].$$

Q2: VRAI.

$\subset$  : Soit  $x \in A \cap (B \cup C)$ . Donc  $x \in A$  et  $x \in (B \cup C)$ . Puisque  $x \in (B \cup C)$ , alors  $x \in B$  ou (au sens logique du terme)  $x \in C$ . Deux cas se présentent :

- $x \in B$  :  
Alors  $x \in (A \cap B)$  et a fortiori  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .
- $x \in C$  :  
Alors  $x \in (A \cap C)$  et a fortiori  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

$\supset$  : Soit  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . Alors  $x \in (A \cap B)$  ou (au sens logique du terme)  $x \in (A \cap C)$ . Ainsi, dans tous les cas,  $x \in A$ .

Puisque  $x \in A$  et que  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . Alors  $x \in B$  ou (toujours au sens logique du terme)  $x \in C$ . Dans tous les cas on a  $x \in (B \cup C)$  et donc  $x \in A \cap (B \cup C)$ .

Nous venons de démontrer la distributivité de  $\cap$  sur  $\cup$ .

Q3: FAUX.

Prendre par exemple  $A = \mathbb{R}$ ,  $B = [1, 3]$  et  $C = [0, 2]$ . Dans ce cas on a

$$(A \cap B) \setminus C = [1, 3] \setminus [0, 2] = ]2, 3]$$

et

$$A \cap (C \setminus B) = \mathbb{R} \cap [0, 1[ = [0, 1[$$

Q4: VRAI.

$\subset$  : Trivial car  $C \supset (B \cap C)$ .

$\supset$  : Si  $x \in (A \cap B) \setminus (B \cap C)$ , alors  $x \in A$  et  $x \in B$ . L'information  $x \notin (B \cap C)$  se réduit alors en  $x \notin C$ . On obtient alors le résultat désiré.

Q5: FAUX.

Prendre par exemple  $A = \{0\}$ ,  $B = \{0; 1; 2\}$  et  $C = \{0; 1; 3\}$ . Dans ce cas on a

$$A \cap (B \cup C) = \{0\}$$

et

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{0; 1\}$$

### Exercice 2.

On raisonne par l'absurde. Supposons que  $\sqrt{6} = \frac{p}{q}$  avec  $p, q$  des entiers naturels tels que  $\text{pgcd}(p, q) = 1$ . Il s'en suit que  $p^2 = 6q^2$ , c.-à-d. que  $p^2$  est donc un multiple de 6, ce qui n'est possible que si  $p$  est un multiple de 6 (Supposons que  $p$  n'est pas multiple de 6. Alors  $p = 6k + r$  où  $k \in \mathbb{N}$  et  $r \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$ , donc  $p^2 = 6(6k^2 + 2kr) + r^2$  où  $r^2$  ne peut prendre qu'une valeur dans  $\{1, 4, 9, 16, 25\}$ . Aucune de ces valeurs n'est divisible par 6, donc  $p^2$  n'est pas divisible par 6. Absurde). On a donc  $p = 6a$  pour un entier naturel  $a$ . Par conséquent,  $6^2 a^2 = 6q^2$  et donc  $q^2 = 6a^2$ . Ainsi  $q^2$  est un multiple de 6, ce qui n'est possible que si  $q$  est un multiple de 6. Mais ceci implique que le plus grand commun diviseur de  $p$  et de  $q$  n'est pas égal à 1, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de départ. Donc  $\sqrt{6}$  est irrationnel.

### Exercice 3.

Q1: On a

$$r^2 = 7 + \sqrt{17},$$

ou

$$\sqrt{17} = r^2 - 7.$$

Si  $r$  est un nombre rationnel, il s'en suit que  $r^2 - 7$  en est aussi un et donc  $\sqrt{17}$  aussi, ce qui est une contradiction. (La preuve que  $\sqrt{17}$  est un nombre irrationnel se fait comme pour 2 ou 3 ou tout autre nombre premier, voir notes du cours). Donc  $r$  est irrationnel.

Q2: On a

$$(r - \sqrt{2})^3 = 3,$$

et donc

$$r^3 - 3r^2\sqrt{2} + 3r \cdot 2 - 2\sqrt{2} - 3 = 0,$$

d'où on obtient

$$\sqrt{2} = \frac{r^3 + 6r - 3}{3r^2 + 2}.$$

Cette égalité implique que  $\sqrt{2}$  est un nombre rationnel si  $r$  est un nombre rationnel, ce qui est une contradiction. Donc  $r$  est irrationnel.

### Exercice 4.

Q1: VRAI.

Par le théorème du cours, si  $A$  est majoré, alors il existe  $\sup A$ . ([DZ], Section 1.2.5). Puisque  $\sup A$  n'existe pas, alors  $A$  n'est pas majoré et donc il n'est pas borné.

Q2: FAUX.

Soit  $A = ]0, 1[ \subset \mathbb{R}$ . Alors on a  $\sup A = 1$  (voir les notes du cours). Donc  $\sup A \notin A$ , mais  $A$  est borné.

Q3: FAUX.

Le supremum de  $A$  est  $\sqrt{4} = 2$  qui appartient bien à  $\mathbb{Q}$ .

Q4: FAUX.

Soit  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  et  $B = [-1, 1]$ . Alors  $\inf A = -2 < \inf B = -1$  et  $\sup A = 2 > \sup B = 1$ , mais  $B \not\subset A$ .

### Exercice 5.

- i)  $A = ] - \infty, 1[$                       ii)  $A = ] - \infty, 1]$   
iii)  $A = [-1, \infty[$                       iv)  $A = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$   
v)  $A = ]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty[$                       vi)  $A = ]-\infty, -\sqrt[3]{3}]$

### Exercice 6.

Q1: Il suffit de s'apercevoir que la suite  $(u_n)$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{1}{n+3}$  est strictement décroissante, de 1<sup>er</sup> terme  $\frac{1}{4}$  et tout les termes sont positifs. On en déduit donc que  $E \subset [0, \frac{1}{4}]$  et donc que  $E$  est borné.

- Q2:
  - Prouvons que 0 est la borne inférieure de  $(u_n)$  :  
D'une part, on a  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n > 0$ . D'autre part, prenons  $\epsilon > 0$ , en prenant  $n = \max(\lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor - 2, 1)$ , nous avons  $u_n = \frac{1}{n+3} = \frac{1}{\lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1} < \epsilon$ . (La notation  $\lfloor x \rfloor$  signifie la partie entier du nombre réel positif  $x$ ). Ainsi, il n'y a pas de minorant de  $(u_n)$  supérieur à 0. La borne inférieure (infimum) est donc 0.
  - Prouvons que  $\frac{1}{4}$  est la borne supérieure de  $(u_n)$  :  
L'argument utilisé en Q1 suffit :  $(u_n)$  est strictement décroissante et de 1<sup>er</sup> terme  $\frac{1}{4}$ . La borne supérieure est donc  $\frac{1}{4}$ .

Q3: On a avec la suite définie précédemment  $u_1 = \frac{1}{4}$  et donc  $\sup E \in E$ .  
De plus,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n > 0$  et donc  $\inf E \notin E$ .

### Exercice 7.

- i)  $\sup A = \sqrt{2} \in A$ ,  $\inf A = -1 \notin A$  (voir les notes du cours).  
ii)  $B$  n'est pas majoré dans  $\mathbb{R}$ ,  $\inf B = \sqrt{2} \notin B$ .  
iii) Soit  $x \in C$ , alors  $|2x - 1| \leq 1$ , ce qui équivaut à  $-1 \leq 2x - 1 \leq 1$ , soit encore  $0 \leq x \leq 1$ . Par conséquent, 0 est le plus grand minorant de  $C$ , et 1 est le plus petit majorant de  $C$ .  $\sup C = 1 \in C$ ,  $\inf C = 0 \in C$ .  
iv) De la même manière qu'à la question précédente,  $|x^2 - 2| < 1$  équivaut à  $-1 < x^2 - 2 < 1$ , soit  $1 < x^2 < 3$ . Pour les solutions positives, on peut passer à la racine carrée (comme la fonction racine carrée est croissante, l'ordre des inégalités est gardé) et obtenir  $1 < x < \sqrt{3}$ . Pour les solutions négatives ( $x < 0$ ), le même raisonnement peut être appliqué à  $-x$  et conduit à  $1 < -x < \sqrt{3}$ , soit  $-\sqrt{3} < x < -1$ . Par conséquent,  $D = ]-\sqrt{3}, -1[ \cup ]1, \sqrt{3}[$ , donc  $\sup D = \sqrt{3} \notin D$ ,  $\inf D = -\sqrt{3} \notin D$ .  
v) Cette question consiste essentiellement en l'étude de la suite  $(u_n)$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{n}{n+1}$ . On remarque que la suite est bornée:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n < 1.$$

Comme  $u_0 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n$ , il est clair que  $\inf E = 0 \in E$ . Démontrons que 1 est la borne supérieure de  $E$ . Soit  $\epsilon > 0$ , cherchons des éléments de  $E$  à une distance de moins de  $\epsilon$  de 1.  $|u_n - 1| < \epsilon$  équivaut à  $1 - u_n < \epsilon$  puisque  $u_n < 1$ . Si  $\epsilon > 1$ , l'inégalité est satisfaite pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $\epsilon < 1$ . On a donc  $|u_n - 1| < \epsilon \Leftrightarrow 1 - \frac{n}{n+1} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon} - 1$ . En prenant  $n = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor$ , nous avons donc bien  $|u_n - 1| < \epsilon$ , donc la borne supérieure de  $E$  est 1.  $\sup E = 1 \notin E, \inf E = 0 \in E$ .

*Remarque:* Pour démontrer que 1 est le supremum du sous-ensemble  $E$ , il suffit de démontrer que (1)  $1 \geq u_n$  pour tout  $u_n \in E$ , et (2) qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $\epsilon > 0$  on a  $1 - u_n < \epsilon$ . Il est souvent plus facile à démontrer l'existence que de trouver explicitement un tel  $n$ . Par exemple, dans le cas donné cela revient à la proposition que pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n > \frac{1}{\epsilon} - 1$ , ce qui suit du fait que le sous-ensemble des nombres naturels n'est pas borné dans  $\mathbb{R}$  (voir les notes du cours).

vi) Pour cette question, il nous faut découper l'ensemble  $F$  en 3 sous-ensembles. Posons  $(u_n)$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n(-1)^n}{n+1}$  et découpons  $F$  en  $\{u_0, u_{2n+2} \text{ et } u_{2n+1}\} \forall n \in \mathbb{N}$ . On remarque que  $u_0 = 0, \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+2} > 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} < 0$ . Chercher la borne supérieure de  $F$  revient donc à chercher la borne supérieure de  $u_{2n+2}$  et de la même façon, chercher la borne inférieure de  $F$  revient à chercher la borne inférieure de  $u_{2n+1}$ .

- Prouvons que la borne inférieure de  $(u_{2n+1})$  est -1 :  
On a  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = -1 + \frac{1}{2(n+1)}$ . -1 est un minorant de  $(u_{2n+1})$  car  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2(n+1)} > 0$ . Prenons  $\epsilon > 0$ , alors il nous faut trouver  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $|-1 + \frac{1}{2(n+1)} - (-1)| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2(n+1)} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{2\epsilon} - 1$ . En posant  $n = \lfloor \frac{1}{2\epsilon} \rfloor$ , nous avons  $u_{2n+1} + 1 < \epsilon$ . Ainsi, la borne inférieure de  $F$  est donc -1.
- Prouvons que la borne supérieure de  $(u_{2n+2})$  est 1 :  
On a  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+2} = 1 - \frac{1}{2n+3}$ . 1 est un majorant de  $(u_{2n+2})$  car  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2n+3} > 0$ . Prenons  $\epsilon > 0$ , en posant  $n = \lfloor \frac{1}{2\epsilon} \rfloor$ , nous avons  $1 - u_{2n+2} < \epsilon$ . Ainsi, la borne supérieure de  $F$  est donc 1.

vii)  $G$  n'est ni majoré ni minoré puisqu'il contient l'ensemble des entiers relatifs.

viii) En plaçant les angles de valeur  $\frac{1}{n+1}$  sur un cercle trigonométrique, il est facile de voir que la suite constituée de leurs sinus,  $u_n = \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)$  est décroissante. Ainsi,  $\sup H = u_0 = \sin(1) \in H$ . Comme  $0 < \frac{1}{n+1} \leq 1$  et que le sinus est croissant sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , on a  $0 < u_n \leq \sin(1)$ . Pour un quelconque réel positif  $x$ ,  $\sin(x) \leq x$ . Ainsi,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \frac{1}{n+1}$ . Or nous avons vu en v) que pour  $\epsilon > 0$  et  $n = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor$ , nous avons  $\frac{1}{n+1} < \epsilon$ , et donc  $|u_n - 0| < \epsilon$ . Donc  $\inf H = 0 \notin H$ . En conclusion,  $\sup H = \sin(1) \in H$  et  $\inf H = 0 \notin H$ .

ix)  $\sup I = 1 \notin I, \inf I = 0 \notin I$ .

### Exercice 8.

Q1: FAUX.

Prendre par exemple  $A = [0, 1[ \cup ]1, 2]$ . La proposition serait vraie pour un intervalle.

Q2: VRAI.

Prenons un intervalle fermé et borné  $I = [a, b]$ . Alors  $a = \inf I$  et  $b = \sup I$ , ce qui est facile à vérifier à partir de la définition de  $\inf$  et  $\sup$  d'un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  (voir les notes du cours). Donc on a  $a = \inf I \in I$  et  $b = \sup I \in I$ .

Q3: FAUX.

Prenons  $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ . On a bien  $A \subset \mathbb{R}$  ainsi que  $\sup A \in A$  et  $\inf A \notin A$  mais  $A$  n'est pas un intervalle semi-ouvert, c'est un ensemble de rationnels.

Q4: VRAI.

Par définition des bornes inférieures et supérieures,  $A$  est non vide. De plus  $\sup A$  et  $\inf A$  sont par définition respectivement un majorant et un minorant de  $A$ . Ainsi, en notant  $M = \sup A = \inf A$  on a  $\forall x \in A, M \leq x \leq M$ . On en déduit que  $A = \{M\}$  et donc que  $A$  est un point.

Q5: FAUX.

Contre-exemple :  $A = \{0\}$ .

Q6: FAUX.

Contre-exemple :  $A = [0, 1[$ .

### Exercice 9.

Q1: Axiome de la borne inférieure  $\implies$  la proposition donnée.

Soient  $A \subset \mathbb{R}$  et  $B \subset \mathbb{R}$  deux ensembles non vides tels que  $A \cup B = \mathbb{R}$ ,  $A \cap B = \emptyset$  et pour tout  $a \in A, b \in B$  on a  $a < b$ . Alors l'ensemble  $B$  est minoré par tout élément de l'ensemble  $A$ . Donc l'axiome de la borne inférieure implique qu'il existe  $c = \inf(B)$  (voir les notes du cours). Par la définition de la borne inférieure,  $c \leq b$  pour tout  $b \in B$  et  $c \geq a$  pour tout  $a \in A$ . (Supposons qu'il existe  $x \in A$  tel que  $c < x$ , et soit  $\varepsilon = (x - c)/2$ . Alors  $c + \varepsilon < x < b$  pour tout  $b \in B$ , ce qui contredit la définition de  $c = \inf(B)$ .)

Q2: La proposition donnée  $\implies$  l'axiome de la borne inférieure.

Soit  $S \subset \mathbb{R}_+^*$  un sous-ensemble non vide des nombres réels positifs. Soit  $A \subset \mathbb{R}$  le sous-ensemble des nombres  $a \in \mathbb{R} : a < s$  pour tout  $s \in S$ . Alors  $0 \in A$  et donc  $A$  n'est pas vide. Soit  $B = \mathbb{R} \setminus A$ , alors  $S \subset B$  et donc  $B$  n'est pas vide. Par la définition de  $B$  on a de plus  $A \cup B = \mathbb{R}$  et  $A \cap B = \emptyset$ . Alors par la proposition donnée, il existe un nombre  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $a \leq c$  pour tout  $a \in A$  et  $c \leq b$  pour tout  $b \in B$ . Il est facile à voir que  $c$  est la borne inférieure de  $S$ . On a déjà  $c \leq b$  pour tout  $b \in B$  et donc  $c \leq s$  pour tout  $s \in S$ , car  $S \subset B$ . Soit  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $s \in S$  on a  $c + \varepsilon < s$ . Alors  $x = c + \varepsilon \in A$  et donc  $c < x$  où  $x \in A$ , ce qui contredit la définition de  $c$ . Donc pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $s \in S$  tel que  $c + \varepsilon \geq s$ , ce qui montre que  $c$  est effectivement la borne inférieure de  $S$ .