

Analyse I

Résumé: Nombres complexes.

Définitions et résultats.

1. L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est constitué de couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ des nombres réels munis des deux opérations, addition et multiplication:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, y_1x_2 + x_1y_2).$$

En particulier, $i = (0, 1) \in \mathbb{C}$ a la propriété $i^2 = -1$. L'ensemble $\mathbb{C}$ muni de ces deux opérations est un corps.

2. Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ a une unique représentation sous la forme *cartésienne* :

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

où $x = \operatorname{Re}(z)$ est la partie réelle et $y = \operatorname{Im}(z)$ la partie imaginaire de $z \in \mathbb{C}$.

3. Tout nombre complexe $z \neq 0$ a une unique représentation sous la forme *polaire*:

$$z = \rho(\cos \phi + i \sin \phi) = \rho e^{i\phi},$$

où $\rho > 0$ et $\phi \in \mathbb{R}$ est défini à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$. Ici $\rho = |z|$ est le module, et $\phi = \arg(z)$ l'argument de z .

4. Si $z = \rho e^{i\phi} \in \mathbb{C}$, alors $z = x + iy$, où

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi.$$

5. Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, tel que $z \neq 0$, alors $z = \rho e^{i\phi}$, où $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et

$$\phi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, \quad y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, \quad y < 0 \end{cases}$$

6. (Le nombre réciproque). Si $z = x + iy = \rho e^{i\phi} \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, alors le nombre réciproque de z est le nombre complexe $\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\rho} e^{-i\phi}$.
7. (Le nombre conjugué). Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, le conjugué de z est par définition le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$. Si $z = \rho e^{i\phi} \neq 0$, alors $\bar{z} = \rho e^{-i\phi}$.

8. (Formule de Moivre). Pour tout $\rho > 0$, $\phi \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}(\rho(\cos \phi + i \sin \phi))^n &= \rho^n(\cos(n\phi) + i \sin(n\phi)) \\ (\rho e^{i\phi})^n &= \rho^n e^{in\phi}.\end{aligned}$$

9. (Racines des nombres complexes). Si $w = se^{i\phi} \in \mathbb{C}^*$ est un nombre complexe différent de zéro, alors

$$\{z \in \mathbb{C}^* : z^n = w\} = \{\sqrt[n]{s} e^{i\frac{\phi+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.\}$$

10. (Théorème fondamental de l'algèbre). Tout polynôme complexe de degré n a n racines complexes (comptées avec les multiplicités). Autrement dit, tout polynôme complexe $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, tel que $a_n \neq 0$, s'écrit sous la forme:

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n),$$

où $z_1, \dots, z_n$ sont des nombres complexes (pas nécessairement distincts).

11. (Polynômes à coefficients réels). Si $z \in \mathbb{C}$ est une racine du polynôme $P(z)$ à coefficients réels, alors $\bar{z}$ l'est aussi. Tout polynôme non-constant à coefficients réels peut être factorisé en polynômes à coefficients réels de degrés 1 et 2. En particulier, si $w, \bar{w} \notin \mathbb{R}$ sont des racines complexes conjuguée d'un polynôme $P(z)$ à coefficients réels, alors le polynôme à coefficients réels

$$(z - w)(z - \bar{w}) = z^2 - (2\operatorname{Re}(w))z + |w|^2$$

divise $P(z)$.

Formules utiles.

1. $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

2. $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$.

3. Soient $z = \rho e^{i\phi}$, $z_1 = \rho_1 e^{i\phi_1}$ et $z_2 = \rho_2 e^{i\phi_2}$ trois nombres complexes différents de zéro. Alors

$$\begin{aligned}(a) \quad z_1 z_2 &= \rho_1 \rho_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)} & (b) \quad \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\phi_1 - \phi_2)} \\ (c) \quad \frac{1}{z} &= \frac{\bar{z}}{|z|^2} & (d) \quad z \bar{z} &= |z|^2.\end{aligned}$$

4. Soient $z, w \in \mathbb{C}$ deux nombres complexes. Alors on a

$$\begin{aligned}(a) \quad \overline{(z \pm w)} &= \bar{z} \pm \bar{w}. \\ (b) \quad \overline{(z \cdot w)} &= \bar{z} \cdot \bar{w}. \\ (c) \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} &= \frac{\bar{z}}{\bar{w}}, \text{ si } w \neq 0. \\ (d) \quad |\bar{z}| &= |z|. \\ (e) \quad \operatorname{Re}(z) &= \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.\end{aligned}$$

5. Soit $\phi \in \mathbb{R}$. Alors on a

$$\cos \phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2}, \quad \sin \phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}.$$