

## Analyse I – Exercices à rendre le 3 décembre avant ou après le cours, salle BCH 2201

### Exercice 3.

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  telle que  $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0$ .

- i)* Montrez, en utilisant un ou des résultats du cours, que l'équation  $f''(x) = 0$  a au moins deux solutions sur  $]0, 1[$ .
- ii)* Donnez un exemple explicite d'une fonction  $f$  satisfaisant les propriétés ci-dessus où l'équation  $f''(x) = 0$  a exactement deux solutions sur  $]0, 1[$ .

**Exercice 4.**

*i)* Calculer le développement limité d'ordre 2 de  $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$  autour de  $x_0 = 1$ .

*ii)* Déterminer si la série

$$\sum_{n \geq 1} \left\{ \arctan\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n} \right\}$$

converge ou diverge, en justifiant rigoureusement votre réponse.