













Ens: Anna Lachowska  
Analyse I - Section  
13 janvier 2025  
3h30

# Student

SCIPER: **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant·e sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - +3 points si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - +1 point si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant·e se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes   Read these guidelines   Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse   select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse   NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse   Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut <b>PAS</b> faire   what should <b>NOT</b> be done   was man <b>NICHT</b> tun sollte		
     		

### Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

**Question 1 :** La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda n}}{n^{1+\lambda}}$$

converge si et seulement si  $\lambda \in I$ , où  $I$  est l'ensemble

- $]-\infty, 0[$ 
  $[-1, +\infty[$ 
  $]-\infty, -1[$ 
  $]-\infty, 0]$

**Question 2 :** Soit l'équation

$$\frac{|z|}{z} = \frac{z^2}{4(\cos(\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3}))}$$

Parmi les nombres complexes ci-dessous, lequel est solution de cette équation?

- $z = 2(\cos(\frac{7\pi}{12}) + i \sin(\frac{7\pi}{12}))$ 
  $z = 2(\cos(\frac{7\pi}{9}) + i \sin(\frac{7\pi}{9}))$   
  $z = \sqrt[3]{4}(\cos(\frac{13\pi}{12}) + i \sin(\frac{13\pi}{12}))$ 
  $z = \sqrt[3]{4}(\cos(\frac{\pi}{9}) + i \sin(\frac{\pi}{9}))$

**Question 3 :** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction bijective définie par

$$f(x) = x^3 + 3x + 1$$

et soit  $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sa fonction réciproque. Alors  $(f^{-1})'(1)$  est égal à

- $\frac{1}{3}$ 
  $\frac{1}{5}$ 
  $\frac{1}{6}$ 
  $\frac{1}{78}$

**Question 4 :** Soit  $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = e^{x+1}(x^2 - 2x + 1)$ . Alors son ensemble image,  $f([-1, 2])$ , est égal à

- $[0, e^3]$ 
  $[4, e^3]$ 
  $[0, 4]$ 
  $[0, +\infty[$

**Question 5 :** L'intégrale  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 - 4} dx$  vaut

- $-\frac{1}{4} \ln(3)$ 
  $2 \ln(3)$ 
  $\frac{1}{2} \ln(3)$ 
  $-\frac{1}{2} \ln(3)$

**Question 6 :** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Alors, en  $x = 0$ ,  $f$  est

- dérivable à droite mais pas à gauche  
 dérivable à gauche mais pas à droite  
 dérivable à gauche et à droite mais n'est pas dérivable  
 dérivable

## CORRECTION

**Question 7 :** Soit  $f: ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\ln(|\ln(x)|)}{\ln(x)}.$$

Alors

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ 
  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$   
  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ 
  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$

**Question 8 :** L'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$

- converge et vaut 2
 converge et vaut  $\frac{1}{2}$   
 diverge
 converge et vaut 1

**Question 9 :** La limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 1}{n(n+3)} \right)^n$$

existe et vaut

- $e^{-3}$ 
  $e^{-1}$ 
 0
 1

**Question 10 :** Soit  $A \subset \mathbb{R}$  l'ensemble défini par

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^* : \frac{1}{x} \geq 2 \right\}.$$

Alors

- $\inf A = 0$ 
  $\inf A = \frac{1}{2}$   
  $\inf A = 2$ 
  $A$  n'est pas minoré

**Question 11 :** Le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$  est

- $\frac{1}{4}$ 
  $+\infty$ 
 4
 0

**Question 12 :** Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  la suite définie par  $u_0 = \sqrt{3}$  et, pour  $n \geq 1$ ,  $u_n = \sqrt{3u_{n-1}}$ . Alors

- $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sqrt{3}$ 
  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 3$ 
  $(u_n)_{n \geq 0}$  diverge
  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

**Question 13 :** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln(x^2 + 1)}{3x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Alors

- $f$  est continûment dérivable sur  $\mathbb{R}$   
  $f$  est dérivable mais n'est pas continûment dérivable sur  $\mathbb{R}$   
  $f$  n'est pas continue sur  $\mathbb{R}$   
  $f$  est continue mais n'est pas dérivable sur  $\mathbb{R}$

## CORRECTION

**Question 14 :** Soit  $f(x) = \ln\left(\frac{3}{2} + x\right)$ . Alors, le développement limité d'ordre 2 de  $f$  autour de  $x_0 = 0$  est donné par

$\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}x^2 + x^2\varepsilon(x)$

$\ln\left(\frac{1}{2}\right) + x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$

$\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right)x - \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$

$\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2 + x^2\varepsilon(x)$

**Question 15 :** La série  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k^3 - k}}$

 ne converge pas mais converge absolument

 converge mais ne converge pas absolument

 converge et converge absolument

 ne converge pas et ne converge pas absolument

**Question 16 :**

Soit  $f: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et les suites  $(a_k)_{k \geq 0}$ ,  $(b_k)_{k \geq 0}$  définies par

$$a_k = f(2k) \quad \text{et} \quad b_k = f(2k + 1).$$

Si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = -1, \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 1,$$

alors, l'équation  $f(x) = 0$

 possède une infinité de solutions

 possède exactement une solution

 possède exactement deux solutions

 ne possède aucune solution

**Question 17 :** Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ , et  $(b_n)_{n \geq 0}$  la suite définie par

$$b_n = 1 + a_n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right), \quad n \geq 0.$$

Alors

$\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = -1$  et  $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$

$\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$  et  $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$

$\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$  et  $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$

$\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = -2$  et  $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$

**Question 18 :** L'intégrale  $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$  vaut

$\frac{8 - 2\sqrt{2}}{3}$

$\frac{4 - 2\sqrt{2}}{3}$

$4 - 2\sqrt{2}$

$\frac{\sqrt{2} + 1}{3}$

## Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

**Question 19 :** Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite bornée telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n > 3$ . Alors  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n > 3$ .

VRAI       FAUX

**Question 20 :** Il existe une fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bornée et injective.

VRAI       FAUX

**Question 21 :** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continûment dérivable. Alors

$$\frac{1}{2}f(t)^2 = \frac{1}{2}f(0)^2 + \int_0^t f(x)f'(x) dx \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

VRAI       FAUX

**Question 22 :** Si la série entière  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k (x-1)^k$  converge pour  $x=0$ , alors elle converge pour  $x=2$ .

VRAI       FAUX

**Question 23 :** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions possédant des développements limités d'ordre 1 autour de  $x_0 = 0$ , donnés par

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + 2x + x\varepsilon(x), \\ g(x) &= 1 + \frac{1}{2}x + x\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Alors le développement limité d'ordre 1 de  $f(g(x))$  autour de  $x_0 = 0$  est donné par

$$f(g(x)) = 3 + x + x\varepsilon(x).$$

VRAI       FAUX

**Question 24 :** Les racines du polynôme  $z^4 + z^3 - 2z^2 + 2z + 4$  sont  $\{-2, -1, \frac{1}{4}, 1+i\}$ .

VRAI       FAUX

**Question 25 :** Soit  $f: ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors il existe une fonction continue  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $g(x) = f(x)$  pour tout  $x \in ]0, 1[$ .

VRAI       FAUX

## CORRECTION

**Question 26 :** Soient  $A, B \subset \mathbb{R}$  deux ensembles non vides et bornés, et  $c \in \mathbb{R}$ . Alors,

$$\sup\{x + c : x \in A\} - \sup\{x + c : x \in B\} = \sup A - \sup B.$$

VRAI       FAUX

**Question 27 :** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow ]0, \infty[$  une fonction dérivable. Alors la fonction  $g: \mathbb{R} \rightarrow ]0, \infty[$  définie par  $g(x) = f(x)^{f(x)}$  est aussi dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

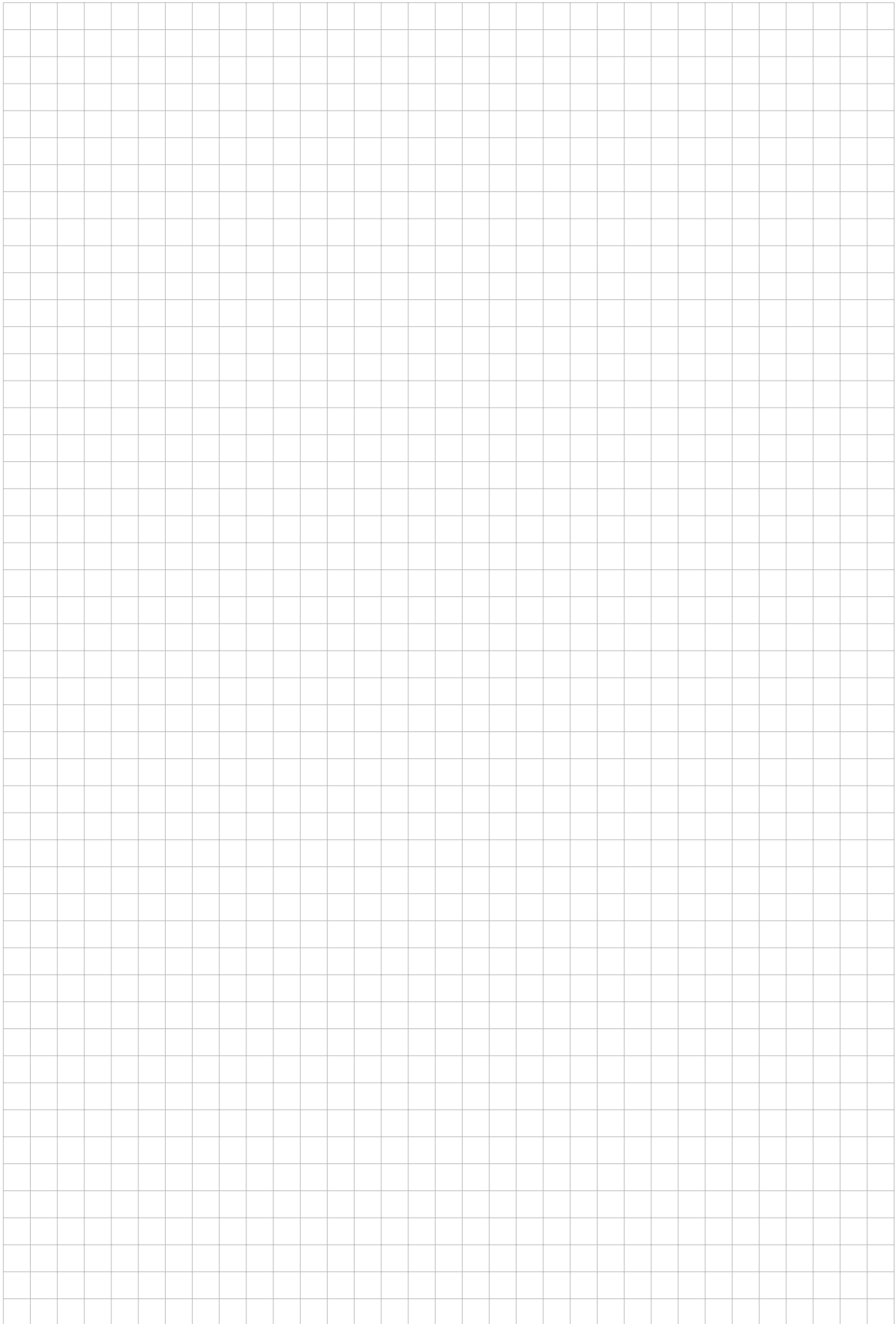
VRAI       FAUX

**Question 28 :** Soient  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 0}$  deux suites telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < a_n < b_n$ . Si la série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  diverge, alors la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b_n}$  converge.

VRAI       FAUX



CORRECTION



CORRECTION

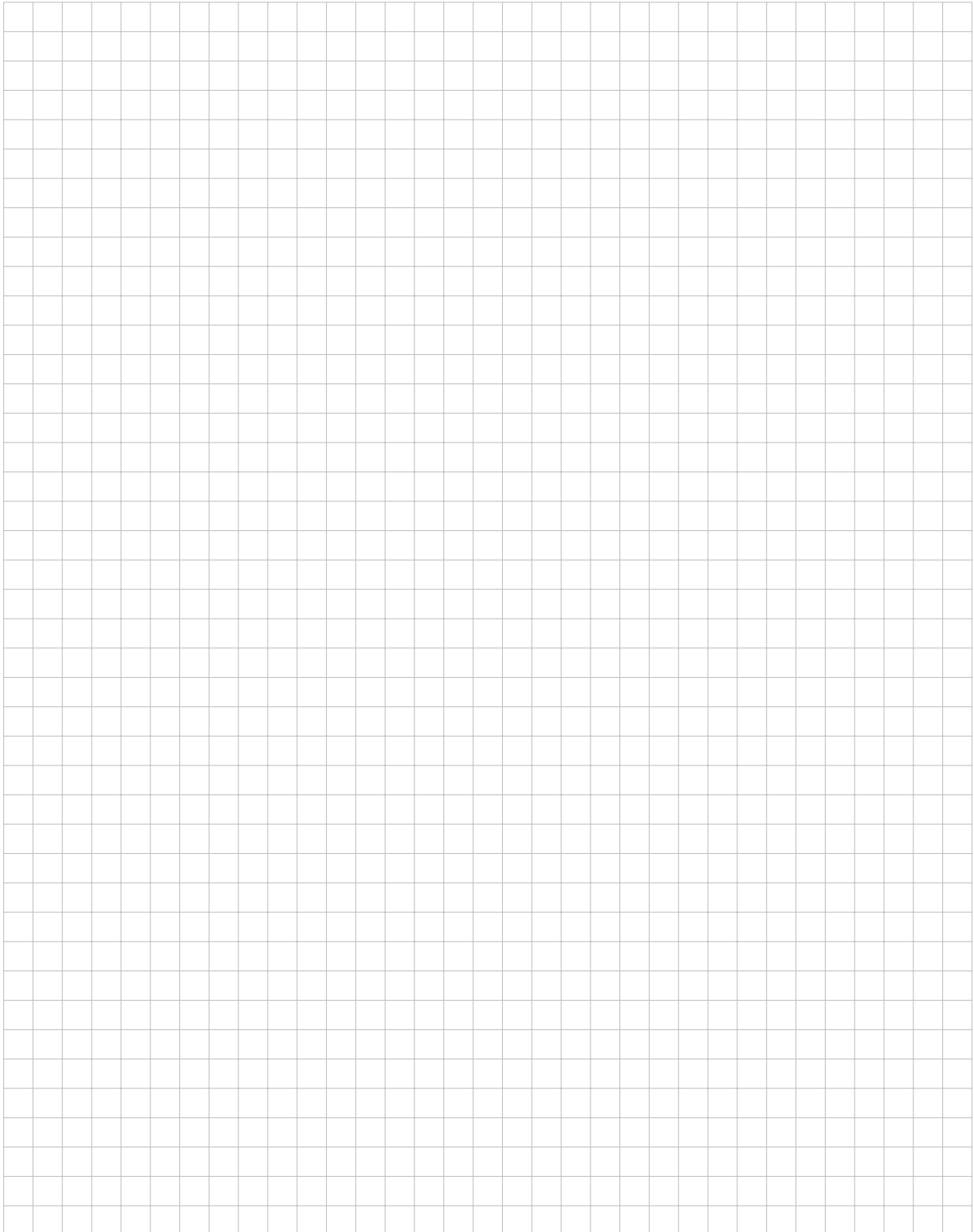
**Question 30:** Cette question est notée sur 4 points.

0  1  2  3  4

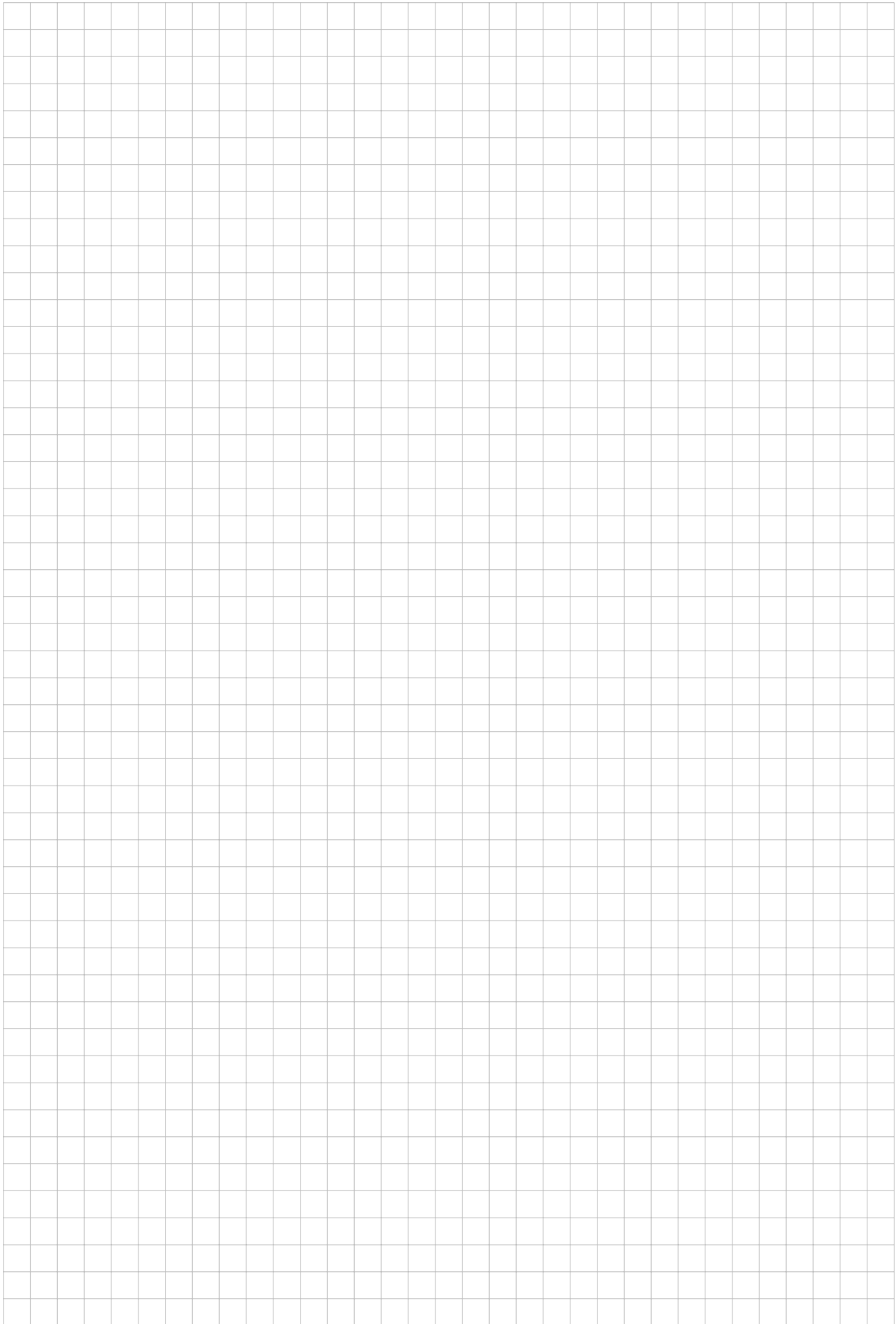
*Réservé au correcteur*

Démontrer par récurrence que pour tout  $x \geq -1$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$  on a

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$



CORRECTION



CORRECTION

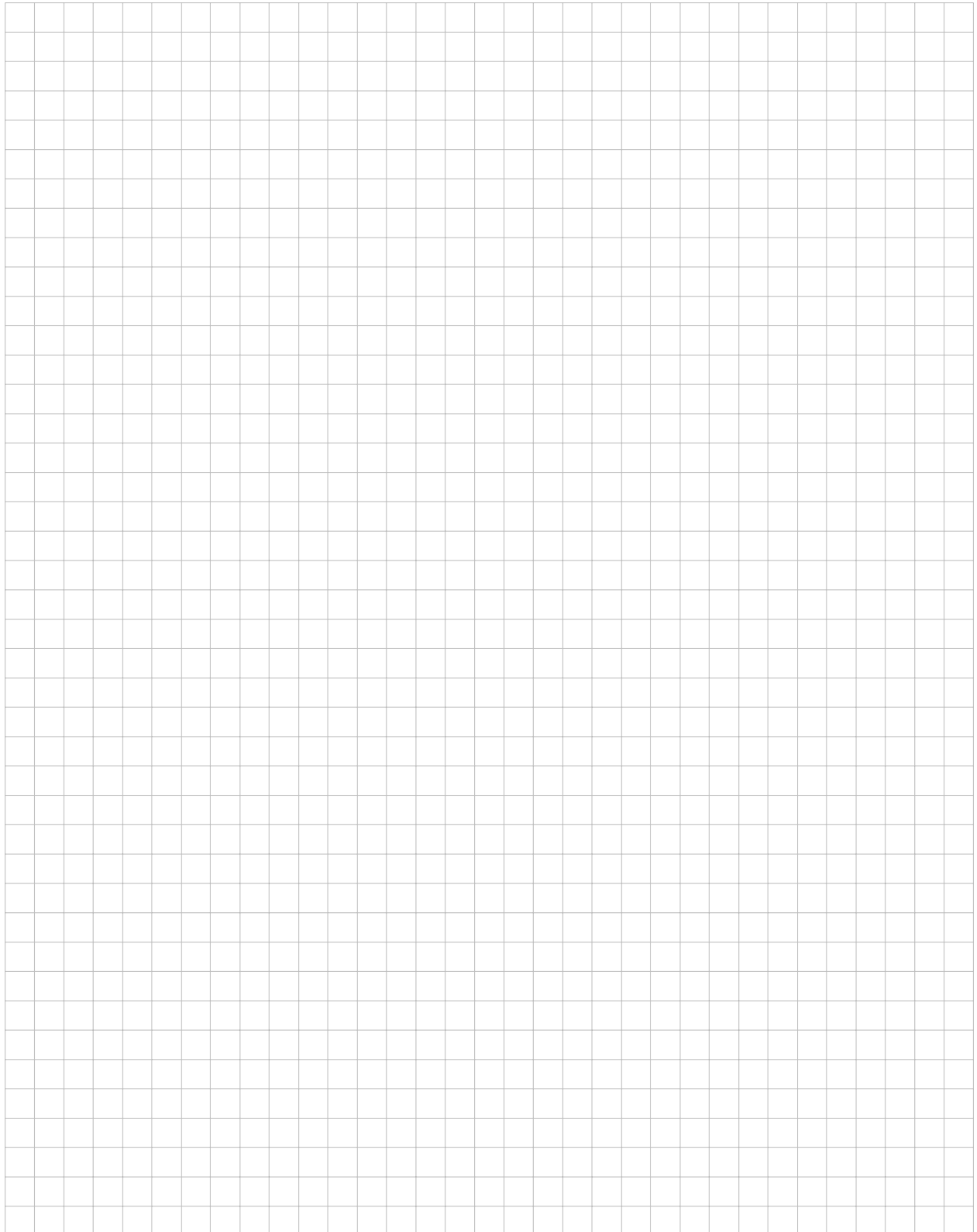
**Question 31:** Cette question est notée sur 4 points.

0  1  2  3  4

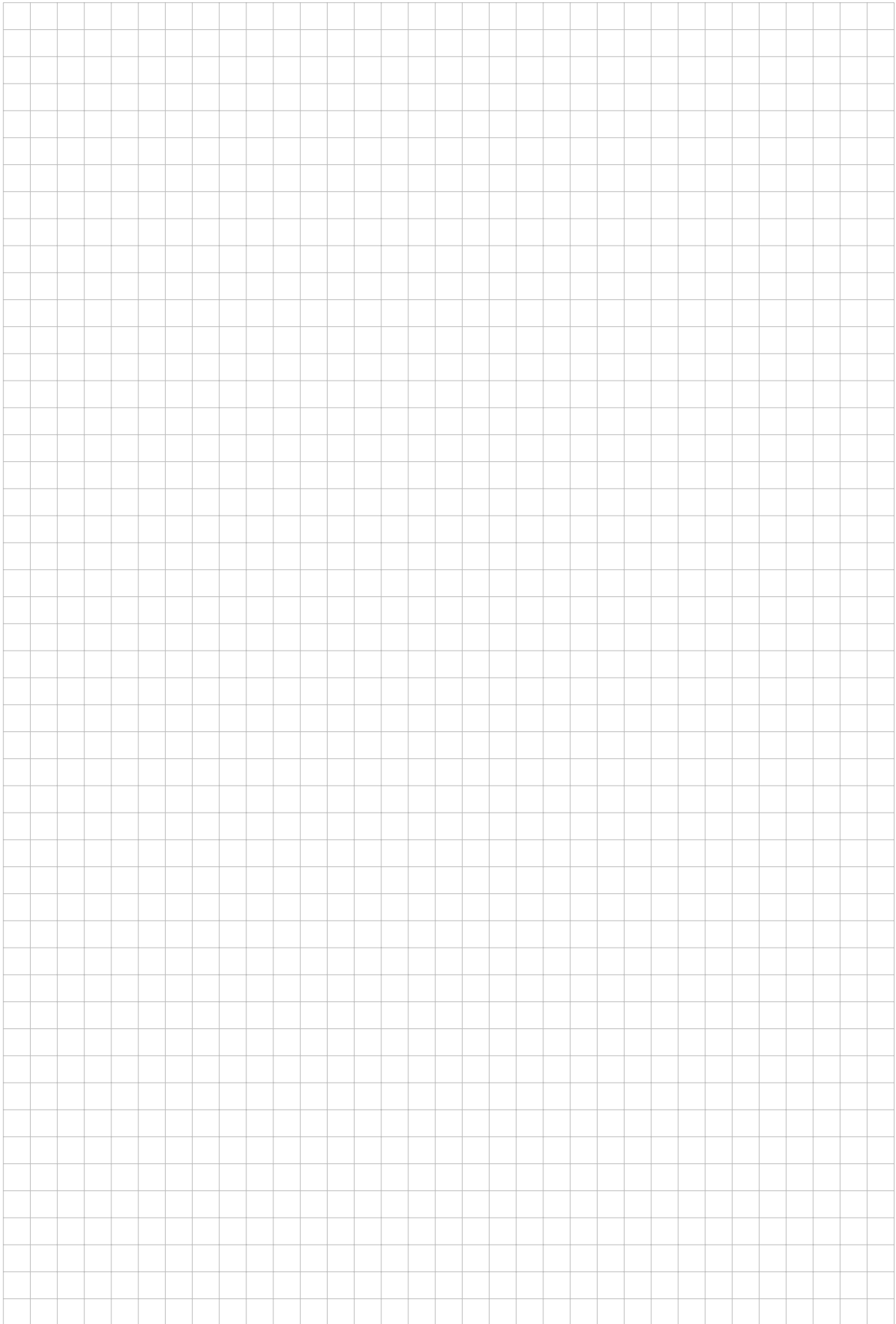
*Réservé au correcteur*

Soit  $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction donnée par la formule  $f(x) = \sqrt{1 + 4 \sin^2(x)}$ .

- (a) Démontrer que  $f$  est injective sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  et trouver l'intervalle  $[a, b] = f([0, \frac{\pi}{2}])$ .
- (b) Soit  $f^{-1} : [a, b] \rightarrow [0, \frac{\pi}{2}]$  la fonction réciproque et  $c = f(\frac{\pi}{4})$ . Calculer  $(f^{-1})'(c)$ .



CORRECTION



## CORRECTION

## CORRECTION

## CORRECTION

## CORRECTION