Anna Lachowska

Analyse I – Corrigé de la Série 9

Exercice 1.

i) En observant que le dénominateur divise le numérateur, on a

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\,(x^2+2x+2)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \left(x^2+2x+2\right).$$

Pour calculer cette limite, on utilise les propriétés algébriques :

$$\lim_{x\to 1} \left(x^2+2x+2\right) = \lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} 2x + 2 = \left(\lim_{x\to 1} x\right)^2 + 2\lim_{x\to 1} x + 2 = 1^2 + 2\cdot 1 + 2 = 5.$$

ii) On utilise la formule $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ avec $a = \sqrt[3]{x+1}$ et $b = \sqrt[3]{x}$ pour obtenir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\left((x+1)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}\right)\left((x+1)^{\frac{2}{3}} + (x+1)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)}{(x+1)^{\frac{2}{3}} + (x+1)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}} + (x+1)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}} = 0\,.\end{aligned}$$

iii) En utilisant que $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, on peut récrire le numérateur comme $\cos^2(x) - \sin^2(x) - 1 = -2\sin^2(x)$ et la limite devient

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2(x)}{\sin(x^2)} &= -2\cdot \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2(x)}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin(x^2)}\right) \\ &= -2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin(x^2)} = -2\cdot 1^2\cdot 1 = -2\end{aligned}$$

car $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (cf. cours).

iv) Comme $1 - x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$, on peut simplifier la fraction en mettant au même dénominateur pour calculer la limite :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) &= \lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = -\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+x+1} = -\frac{3}{3} = -1,.\end{aligned}$$

où on utilise de nouveau les propriétés algébriques pour calculer la dernière limite.

v) Avec une formule de trigonométrie on peut récrire le numérateur

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{-2\cdot\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}\\
&= -\left(\lim_{x\to a}\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a}\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}\right) = -\sin(a)
\end{aligned}$$

car la deuxième limite vaut 1.

vi) On utilise la limite connue $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$. Si $a\neq 0$ et $b\neq 0$, on a

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{ax}-1}{ax}\cdot a-\frac{e^{bx}-1}{bx}\cdot b\right) = a-b.$$

Si $a\neq 0$ et $b=0$, on a $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}\cdot a=a$. Si $a=0$ et $b\neq 0$, on a $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{bx}}{bx}\cdot b=-b$. Si $a=b=0$, on a $\lim_{x\to 0}\frac{1-1}{x}=0$. Ainsi pour tout couple $a,b\in\mathbb{R}$ on a

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = a-b.$$

Exercice 2.

i) En multipliant par le conjugué du numérateur et du dénominateur on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{4-x}}{\sqrt{x}-1} &= \frac{[(2+x)-(4-x)]\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{4-x}\right)}\\
&= 2\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{2+x}+\sqrt{4-x}}\\
&\xrightarrow[x\to 1]{} \frac{2}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

ii) Posons $y=x-2$. Alors $x\to 2$ implique $y\to 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-4}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} &= \frac{(y+2)^2-4}{\sin\left(\frac{\pi y}{2}+\pi\right)}\\
&= -\frac{y^2+4y}{\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)} \quad \text{car } \sin(a+\pi)=-\sin(a)\ ,\ \forall a
\end{aligned}$$

En utilisant la limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1,$$

on a

$$\lim_{y\to 0}-\frac{y^2+4y}{\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)} = \lim_{y\to 0}-\frac{\frac{\pi y}{2}}{\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)}\frac{2(y+4)}{\pi} = -\frac{8}{\pi}.$$

iii) Tout d'abord, remarquons que

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \cos(2x+x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)\\
&= \left(1-2\sin^2(x)\right)\cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x) = \cos(x) - 4\sin^2(x)\cos(x)\\
&= \cos(x)\left(1-4\sin^2(x)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\cos(3x)-\cos x}{x^2} = -4\frac{\cos(x)\sin^2(x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -4$$
$$\text{car} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

iv) En multipliant par le conjugué du numérateur au numérateur et au dénominateur, on obtient

$$\begin{aligned}
x\left(\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)} - 1\right) &= x\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right) - 1}{\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)} + 1}\\
&= \frac{2+3+\frac{6}{x}}{\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)} + 1}\\
&\underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

v) On observe que $(e^{2x}-2+e^{-2x}) = (e^x - e^{-x})^2$ et on utilise la limite connue $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})^2}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{x}\right)^2 = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\left(\frac{e^x-1}{x} + \frac{e^{-x}-1}{-x}\right)^2 = \frac{4}{3}.$$

vi) En multipliant par $2x^2$ et par le conjugué du dénominateur au numérateur et au dénominateur, on obtient

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{2x^2}}{2x^2}\cdot\frac{2x^2(\sqrt{1+5x^2}+1)}{5x^2} = -\frac{4}{5}.$$

Exercice 3.

i) Observons que $\lim_{x\to\alpha} \dfrac{\tan^2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\tan^2(x)}{x^2}$. Du cours on sait que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$. Ainsi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x\cdot\cos(x)} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)}\right) = 1$$

car les deux limites existent et valent 1. Il suit que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2(x)}{x^2} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x}\right)^2 = 1^2 = 1$$

et donc la limite donnée existe pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii) Cette limite existe si et seulement si α est une racine double du polynôme au numérateur. Evalué en α, celui-ci devient

$$\alpha^4 - 2\alpha^4 + 4\alpha^2 = \alpha^2(4-\alpha^2) = \alpha^2(2+\alpha)(2-\alpha).$$

Les candidats sont donc les racines de ce polynôme-ci, c.-à-d. $\alpha \in \{0, -2, 2\}$.
Pour $\alpha = 0$, le polynôme est $x^4 + 4x^2 = x^2(x^2+4)$ dont 0 est bien une racine double.
Pour $\alpha = \pm 2$, on a

$$x^4 \mp 4x^3 + 4x^2 = x^2(x^2 \mp 4x + 4) = x^2(x \mp 2)^2$$

et donc 2 et -2 sont des racines doubles respectives.
Ainsi la limite existe si et seulement si $\alpha \in \{-2, 0, 2\}$.

iii) On distingue trois cas pour β.

1) Si $\beta = 0$, la limite vaut

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \alpha|x|}{|x|} = \lim_{x\to 0} \left(|x|\sin\left(\tfrac{1}{x}\right) + \alpha\right) = \alpha$$

car $0 \le \left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le |x|$, d'où il suit par le théorème des deux gendarmes que $\lim_{x\to 0} |x|\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. La limite donnée existe donc pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ si $\beta = 0$.

2) Si $\beta < 0$, $x^2 + \beta\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|$ prend des valeurs négatives au voisinage de $x = 0$. En effet, pour $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \left(x_n^2 + \beta\left|\cos\left(\tfrac{1}{x_n}\right)\right|\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\tfrac{1}{2n\pi}\right)^2 + \beta\,|\cos(2n\pi)|\right) = \beta < 0.$$

Ainsi l'expression n'est pas définie et donc la limite n'existe pas.

3) Si $\beta > 0$, il faut encore distinguer si α est nul ou pas.
Si $\alpha = 0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$0 \le \frac{x^2\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|}{\sqrt{x^2 + \beta\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|}} = \frac{|x|\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|}{\sqrt{1 + \frac{\beta}{x^2}\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|}} \le |x|$$

et donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|}{\sqrt{x^2 + \beta\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|}} = 0$$

pour tout $\beta > 0$.
Si $\alpha \neq 0$, la limite n'existe pas. En effet, en prenant les suites $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 \sin\big(\frac{1}{x_n}\big) + \alpha|x_n|}{\sqrt{x_n^2 + \beta\left|\cos\big(\frac{1}{x_n}\big)\right|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\big(\frac{1}{2n\pi}\big)^2 \sin(2n\pi) + \frac{\alpha}{2n\pi}}{\sqrt{\big(\frac{1}{2n\pi}\big)^2 + \beta\left|\cos(2n\pi)\right|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\alpha}{2n\pi}}{\sqrt{\big(\frac{1}{2n\pi}\big)^2 + \beta}} = 0$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{y_n^2 \sin\big(\frac{1}{y_n}\big) + \alpha|y_n|}{\sqrt{y_n^2 + \beta\left|\cos\big(\frac{1}{y_n}\big)\right|}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{|y_n| \sin\big(\frac{1}{y_n}\big) + \alpha}{\sqrt{1 + \frac{\beta}{y_n^2}\left|\cos\big(\frac{1}{y_n}\big)\right|}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\big(\frac{\pi}{2}+2n\pi\big)^{-1} \sin\big(\frac{\pi}{2}+2n\pi\big) + \alpha}{\sqrt{1 + \beta\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)^2\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right|}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi} + \alpha\right) = \alpha\end{aligned}$$

car $\cos\big(\frac{\pi}{2}+2n\pi\big) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La limite n'existe donc pas (car $\alpha \neq 0$).
Pour résumer, la limite existe si et seulement si $\beta = 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ ou si $\beta > 0$ et $\alpha = 0$.

Exercice 4.

Les limites à gauche et à droite de f en $x_0 = 3$ sont respectivement

$$\ell_- := \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (\beta x - 4) = 3\beta - 4$$

$$\ell_+ := \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{(3x-1)(x-3)}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x\to 3^+} \frac{3x-1}{x+1} = \frac{8}{4} = 2$$

Comme $f(x_0) = \alpha$, la fonction f est continue à gauche en $x_0 \Leftrightarrow \ell_- = \alpha$, et continue à droite en $x_0 \Leftrightarrow \ell_+ = \alpha$. Si, en plus, $\ell_- = \ell_+ = \alpha$, alors f est continue en x_0.

i) Avec $\alpha = 1$, $\ell_- = -\frac{5}{2}$ et $\ell_+ = 2$, f n'est ni continue à gauche ni continue à droite.
ii) Avec $\alpha = 1$, $\ell_- = 1$ et $\ell_+ = 2$, f est continue à gauche mais pas continue à droite.
iii) Avec $\alpha = 2$, $\ell_- = 1$ et $\ell_+ = 2$, f n'est pas continue à gauche mais continue à droite.
iv) Avec $\alpha = 1$, $\ell_- = 2$ et $\ell_+ = 2$, on a bien $\ell_- = \ell_+$, mais f n'est quand-même ni continue à gauche ni continue à droite parce que les limites ne sont pas égales à $f(x_0)$.
v) Avec $\alpha = 2$, $\ell_- = 2$ et $\ell_+ = 2$, f est continue.

Comme illustration, les graphes sont tracés à la Fig. 1.

Exercice 5.

i) On calcule les limites de $f(x)$ lorsque $x \to 0$ des deux côtés en introduisant une nouvelle variable u tel que $x = \frac{1}{u}$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{u\to-\infty} f\big(\tfrac{1}{u}\big) = \lim_{u\to-\infty} \frac{1}{1+2^u} = 1 = f(0),$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{u\to\infty} f\big(\tfrac{1}{u}\big) = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{1+2^u} = 0 \neq f(0).$$

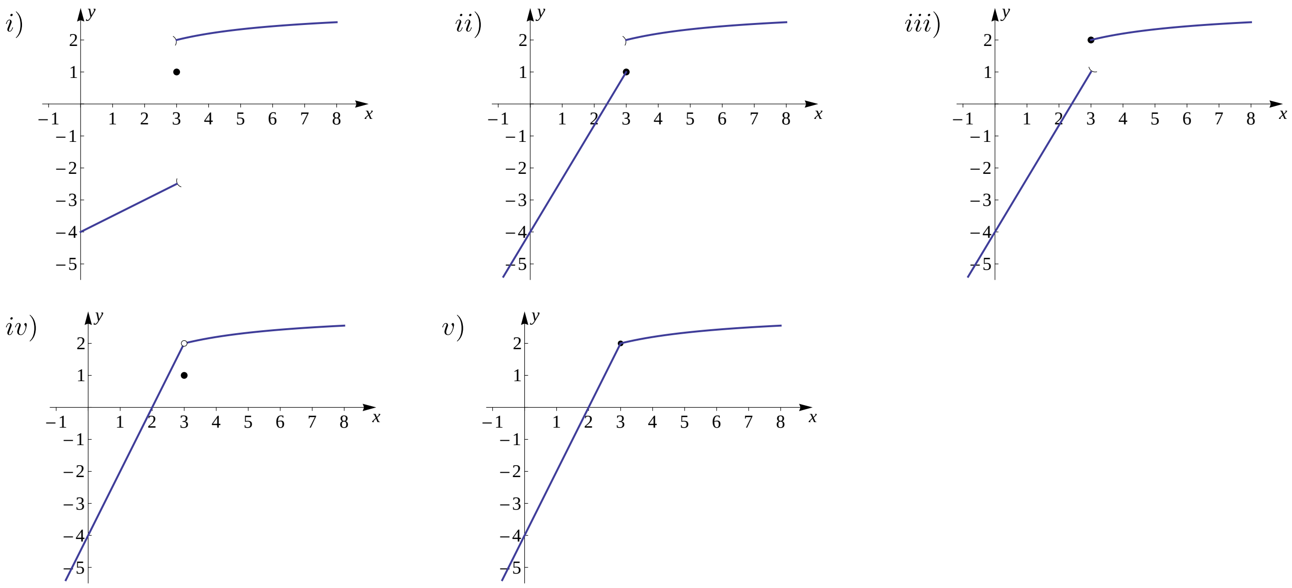

FIGURE 1 – Graphes des fonctions $f(x)$ de l'Ex. 5.

Donc f n'est pas continue mais seulement continue à gauche en $x = 0$ (Fig. 2).

ii) Notons que f est paire parce que les fonctions $\cos(x)$ et x^2 sont paires. Ainsi il suffit de considérer la limite à droite (ou celle à gauche). On a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x)^2}{x^2\big(1+\cos(x)\big)} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+\cos(x)}$$

$$= 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = f(0),$$

où on a utilisé que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1\Big(= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}\Big)$ (cf. cours) et la décomposition en produit de deux limites est valable parce que les deux limites existent. Ainsi f est continue en $x = 0$.

iii) Considérons les suites (x_n) et (y_n) définies respectivement par $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$. Ces suites satisfont $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ mais

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \cos(2n\pi) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \cos\big(\tfrac{\pi}{2} + 2n\pi\big) = 0.$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas et f n'est pas continue en $x = 0$ (Fig. 3).

iv) Comme la fonction sinus prend des valeurs dans $[-1, 1]$, on a

$$-|x| \leq x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|.$$

Par le théorème des deux gendarmes, puisque $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$, on a

$$\lim_{x\to 0} \left(x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0 = f(0).$$

Ainsi f est continue en $x = 0$ (Fig. 4).

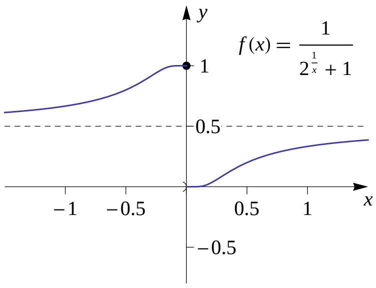

FIGURE 2 – Ex. 6(i)

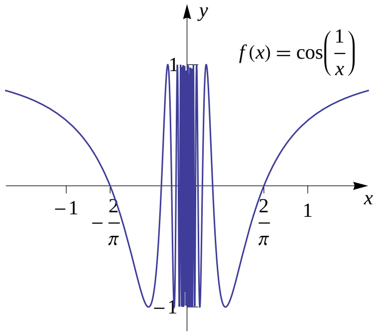

FIGURE 3 – Ex. 6(iii)

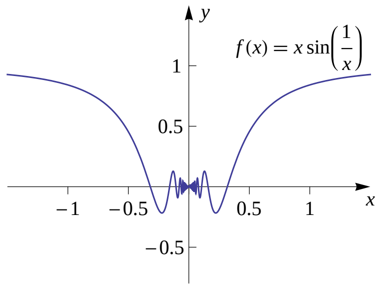

FIGURE 4 – Ex. 6(iv)

Exercice 6.

i) Posons

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{x-1} - x - 1 \end{array}$$

Par opérations usuelles, f est continue sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$f(0) = \frac{1}{e} - 1 < 0 \text{ et } f(3) = e^2 - 4 > 0$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$$\exists \alpha \in [0,\, 3] \text{ tel que } f(\alpha) = 0$$

f a donc bien au moins 1 racine.

ii) Posons

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - \dfrac{1}{x} - 1 \end{array}$$

Par opérations usuelles, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$f(1) = -1 < 0 \text{ et } f(2) = \frac{5}{2} > 0$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$$\exists \alpha \in [1,\, 2] \text{ tel que } f(\alpha) = 0$$

f a donc bien au moins 1 racine.

iii) Posons

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x-2)\cos(x) - \sin(x) \end{array}$$

Par opérations usuelles, f est continue sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$f(0) = -2 < 0 \text{ , } f(-\pi) = 2 + \pi > 0 \text{ et } f(2\pi) = 2(\pi - 1) > 0$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$$\exists \alpha \in]-\pi,\, 0[\text{ tel que } f(\alpha) = 0 \text{ et } \exists \beta \in]0,\, 2\pi[\text{ tel que } f(\beta) = 0$$

f a donc bien au moins 2 racines.

iv) Posons

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^x - x^5 - 1 \end{array}$$

Par opérations usuelles, f est continue sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$f(0) = -1 < 0 \text{ , } f(-2) = -\frac{2}{e^2} - 1 + 2^5 > 0 \text{ et } f(1) = e - 2 > 0$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$$\exists \alpha \in]-2, 0[\text{ tel que } f(\alpha) = 0 \text{ et } \exists \beta \in]0, 1[\text{ tel que } f(\beta) = 0$$

f a donc bien au moins 2 racines.