

## Analyse I – Corrigé de la Série 7

### Exercice 1.

(a) : *i)* Pour la série géométrique, le critère de d'Alembert s'écrit (pour  $q \neq 0$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{q^{n+1}}{q^n} \right| = |q|.$$

Donc par le critère, la série géométrique converge (absolument) si  $|q| < 1$  (la convergence (absolue) pour  $q = 0$  est triviale) et diverge si  $|q| > 1$ . Si  $|q| = 1$ , la série diverge aussi, car  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ .

*ii)* Le critère de Cauchy appliqué à la série géométrique s'écrit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|q^n|} = |q|.$$

Donc par le critère, la série converge (absolument) pour  $|q| < 1$  et diverge pour  $|q| > 1$ . Si  $|q| = 1$ , la série diverge aussi, car  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ .

(b) : *i)* On a que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{2 + (-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \frac{2^n}{2 + (-1)^n} \right| = \left| \frac{2 + (-1)^{n+1}}{2(2 + (-1)^n)} \right|$$

Cette suite ne converge pas. Ainsi, on ne peut pas appliquer le critère de d'Alembert ici.

*ii)* On a que

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left| \frac{2 + (-1)^n}{2^n} \right|} = \frac{1}{2} \sqrt[n]{2 + (-1)^n}$$

Or l'on a toujours

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \sqrt[n]{2 + (-1)^n} \leq \frac{1}{2} \sqrt[3]{3}$$

Les deux termes extérieurs tendant tous deux vers  $\frac{1}{2}$ , on a d'après le théorème des gendarmes que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2} < 1$$

Ainsi, d'après le critère de Cauchy, la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n}$  converge absolument.

**Remarque :** On aurait pu remarquer que  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

et donc que la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n}$  converge comme somme de deux séries géométriques convergentes.

## Exercice 2.

i) Par le critère de Cauchy, la série converge (absolument), car

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3n+2}{4n+5} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{4n+5} = \frac{3}{4} < 1.$$

*Remarque.* Puisque la série converge, on peut en déduire la limite de la suite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n+2}{4n+5} \right)^n = 0,$$

ce qui est une condition nécessaire pour la convergence de la série. De cette manière on réussit parfois à démontrer la convergence vers zéro des suites dont la limite n'est pas autrement évidente.

ii) Par le critère de d'Alembert, la série converge (absolument), car

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^4}{3n^4} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4}{3n^4} = \frac{1}{3} < 1.$$

iii) Cette série converge par le critère de Leibniz. En effet,  $a_n = \frac{(-1)^n}{3n-2}$  satisfait les trois conditions de ce critère :

- le signe de  $a_n$  change avec la parité de  $n$ ,
- la suite des valeurs absolues  $|a_n| = \frac{1}{3n-2}$  est décroissante,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ .

Notons encore que la série absolue  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  ne converge pas parce que  $\frac{1}{3n-2} \geq \frac{1}{3n}$  et la

série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverge.

iv) On a

$$\sqrt{n^2+7} - n = \frac{(\sqrt{n^2+7} - n)(\sqrt{n^2+7} + n)}{\sqrt{n^2+7} + n} = \frac{7}{\sqrt{n^2+7} + n}.$$

Observons que pour  $n > 3$ , on a  $n^2+7 < (n+1)^2$  et donc

$$\frac{7}{\sqrt{n^2+7} + n} > \frac{7}{\sqrt{(n+1)^2 + n}} > \frac{7}{3n}.$$

Comme la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{3n} = \frac{7}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverge, la série initiale diverge aussi par le critère de comparaison.

v) On a

$$\left| 1 - \cos \left( \frac{\pi}{n+1} \right) \right| \stackrel{(1)}{=} 2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{2(n+1)} \right) \stackrel{(2)}{\leq} 2 \left( \frac{\pi}{2(n+1)} \right)^2 = \frac{\pi^2}{2(n+1)^2} < \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{n^2},$$

où on a utilisé la trigonométrie en <sup>(1)</sup> et l'inégalité  $\sin x \leq x$  pour  $x \geq 0$  en <sup>(2)</sup>.

Comme la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  converge, la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \cos \left( \frac{\pi}{n+1} \right) \right)$  converge (absolument) par le critère de comparaison.

vi) Cette série diverge car  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+4)(n-3)}{7n^3+n+2} = \frac{1}{7} \neq 0$  (critère nécessaire).

vii) On a pour tout  $n \geq 1$

$$0 < \frac{\sqrt{n+4} - \sqrt{n}}{n} = \frac{4}{n(\sqrt{n+4} + \sqrt{n})} < \frac{2}{n^{3/2}}.$$

Par le critère de comparaison, la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+4} - \sqrt{n}}{n}$  converge (absolument) car

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$  converge. Ceci se démontre comme pour le cas de la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  : la suite

des sommes partielles  $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{3/2}}$  est croissante et bornée car

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \left( \frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{3^{3/2}} \right) + \left( \frac{1}{4^{3/2}} + \frac{1}{5^{3/2}} \right) + \dots \\ &\leq 1 + 2 \left( \frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{4^{3/2}} + \dots \right) \\ &\leq 1 + \frac{2}{2^{3/2}} \left( 1 + \frac{1}{2^{3/2}} + \dots \right) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} s_n \end{aligned}$$

et donc  $s_n \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$ .

*Remarque.* Exercice 8 montre que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  converge pour tout  $p > 1$ .

### Exercice 3.

i) Posons  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{S}_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}_n = 1$$

ii) Posons  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{S}_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+3)} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{i} - \frac{1}{i+3} \right)$

Soit  $\mathcal{S}_n = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$ . Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}_n = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{11}{18}.$$

$$iii) \text{ Posons } \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{S}_n = \sum_{i=2}^n \frac{2i-1}{i^2(i-1)^2} = \sum_{i=2}^n \left( \frac{1}{(i-1)^2} - \frac{1}{i^2} \right) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Ainsi :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}_n = 1$$

#### Exercice 4.

$$i) \text{ La série géométrique } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{c}{1-c} \right)^n \text{ converge (absolument)} \Leftrightarrow \left| \frac{c}{1-c} \right| < 1 \Leftrightarrow c = 0$$

ou bien

$$\left| \frac{c-1}{c} \right| > 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{c} > 1 \text{ ou } 1 - \frac{1}{c} < -1 \Leftrightarrow c < 0 \text{ ou } 0 < c < \frac{1}{2}$$

Alors on a :  $c < \frac{1}{2}$ .

*Remarque* : On pourrait aussi utiliser le critère de Cauchy et puis traiter le cas où le critère de Cauchy ne permet pas de conclure (limite = 1) séparément. En effet, quand

$\left| \frac{c}{1-c} \right| = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$ , on a la série  $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n$  qui diverge.

ii) Pour  $c = 0$  la convergence vers 0 est évidente et on peut supposer que  $c \neq 0$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} |c| \right) = |c|,$$

ce qui nous permet de conclure, grâce au critère de d'Alembert, que la série converge (absolument) si  $|c| < 1$  et qu'elle diverge si  $|c| > 1$ . Si  $c = \pm 1$ , la série diverge.

iii) Pour  $c = 2k + 1$  avec  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $\left| \left( \sin\left(\frac{\pi c}{2}\right) \right)^n \right| = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et donc la série diverge.

Pour  $c \neq 2k + 1$  avec  $k \in \mathbb{N}$ , on a par le critère de Cauchy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \left| \sin\left(\frac{\pi c}{2}\right) \right| < 1,$$

et donc la série converge (absolument) et sa somme vaut (série géométrique commençant à  $n = 1$ )

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sin\left(\frac{\pi c}{2}\right) \right)^n = \frac{\sin\left(\frac{\pi c}{2}\right)}{1 - \sin\left(\frac{\pi c}{2}\right)}.$$

iv) Pour  $c = 0$ , la série converge et est égale à zéro. Soit donc  $c \neq 0$ . En utilisant le critère de d'Alembert, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c^{n+1}(n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot c^n n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| c \cdot \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c|}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{|c|}{e}.$$

Ainsi la série converge (absolument) si  $|c| < e$  et elle diverge si  $|c| > e$  (et on obtient aucune information si  $|c| = e$ ).

Si  $c = \pm e$ , la suite des valeurs absolues  $(|a_n|)$  est croissante :

$$|a_{n+1}| = |a_n| \cdot \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > |a_n|$$

car la suite  $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  croît vers  $e$ . Comme  $|a_1| = |c| = e$ , il suit que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ . Le critère nécessaire pour la convergence d'une série n'est donc pas satisfait et la série diverge.

### Exercice 5.

i) On calcule

$$\begin{aligned} cS_n - S_n &= c(1 + 2c + 3c^2 + \dots + nc^{n-1}) - (1 + 2c + 3c^2 + \dots + nc^{n-1}) \\ &= -(1 + c + c^2 + \dots + c^{n-1}) + nc^n = -\frac{1 - c^n}{1 - c} + nc^n. \end{aligned}$$

ii) En utilisant le résultat de i) on a d'une part pour tout  $n \geq 1$  :

$$\sum_{k=1}^n kc^{k-1} = S_n = \frac{1}{c-1} \left( -\frac{1-c^n}{1-c} + nc^n \right) = \frac{1-c^n}{(1-c)^2} + \frac{nc^n}{c-1}. \quad (1)$$

Dans l'Ex. 4 ii) on a montré que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} nc^n$  converge pour  $|c| < 1$ , donc en particulier pour  $0 < c < 1$ . Ainsi par le critère nécessaire de la convergence d'une série,  $\lim_{n \rightarrow \infty} nc^n = 0$ . En laissant  $n \rightarrow \infty$  dans (1), on obtient alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1-c^n}{(1-c)^2} + \frac{nc^n}{c-1} \right) = \frac{1}{(1-c)^2}.$$

### Exercice 6.

On distingue pour chacun des deux critères les cas de convergence et de divergence.

*Critère de Cauchy - cas convergent.*

Le but est de trouver une suite  $(b_n)$  de la forme  $b_n = Cq^n$  avec  $|q| < 1$  et  $C > 0$  telle que il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $|a_n| \leq b_n$  pour tout  $n \geq n_0$ .

Soit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho < 1$ . On choisit  $q$  tel que  $\rho < q < 1$  (par exemple  $q = \frac{1+\rho}{2}$ , mais la valeur précise n'a pas d'importance ici). Puisque la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  existe, on peut trouver un entier naturel  $n_0 \geq 1$  tel que  $\sqrt[n]{|a_n|} < q$  pour tout  $n \geq n_0$  (en effet, écrire la définition de la limite de  $\sqrt[n]{|a_n|}$  pour  $\varepsilon = q - \rho > 0$ ). Par conséquent on a

$$0 \leq |a_n| \leq q^n \quad \text{pour tout } n \geq n_0.$$

ce qui implique la convergence de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ , car  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ .

*Critère de Cauchy - cas divergent.*

Dans ce cas on veut trouver  $(b_n)$  avec  $|q| > 1$  telle que  $|a_n| \geq b_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Soit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho > 1$ . On choisit  $q$  tel que  $\rho > q > 1$ . Il existe un entier naturel  $n_0$  tel que  $\sqrt[n]{|a_n|} > q$  pour tout  $n \geq n_0$  (écrire la définition de la limite pour  $\varepsilon = \rho - q > 0$ ). Par conséquent on a

$$|a_n| \geq q^n \geq 1 \quad \text{pour tout } n \geq n_0. \quad (2)$$

et donc la série  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  diverge parce que  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \infty$ .

*Remarque :* Pour montrer la divergence de la série sans passer par le critère de comparaison, il suffit de constater à partir de (2) que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ . Ainsi la série  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  diverge parce que le critère nécessaire pour la convergence n'est pas satisfait.

*Critère de d'Alembert - cas convergent.*

La stratégie est la même que pour le cas convergent du critère de Cauchy.

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho < 1$ , choisir  $q$  tel que  $\rho < q < 1$ . Il existe un entier naturel  $n_0$  tel que  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q$  pour tout  $n \geq n_0$  (poser  $\varepsilon = q - \rho$ ). Par conséquent on a pour tout  $n \geq n_0$

$$|a_n| \leq |a_{n-1}| q \leq |a_{n-2}| q^2 \leq \dots \leq |a_{n_0}| q^{n-n_0} = \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}} q^n = C q^n,$$

où on pose  $C = \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}}$ . Ainsi

$$0 \leq |a_n| \leq b_n := C q^n \quad \text{pour tout } n \geq n_0.$$

Ceci implique la convergence de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ .

*Critère de d'Alembert - cas divergent.*

Même stratégie que pour le critère de Cauchy.

Soit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho > 1$ . On choisit  $q$  tel que  $\rho > q > 1$ . Il existe un entier naturel  $n_0$  tel que  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > q$  pour tout  $n \geq n_0$  (poser  $\varepsilon = \rho - q > 0$ ). Par conséquent on a pour tout  $n \geq n_0$

$$|a_n| \geq |a_{n-1}| q \geq |a_{n-2}| q^2 \geq \dots \geq |a_{n_0}| q^{n-n_0} = \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}} q^n.$$

où on pose  $C = \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}}$ . Ainsi

$$|a_n| \geq C q^n \quad \text{pour tout } n \geq 0$$

et donc la série  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  diverge comme pour le critère de Cauchy.

## Exercice 7.

i) Posons  $a_n = q^n n^b$ . Si  $q = 0$ , la série converge vers 0. Sinon, on peut calculer :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{q^{n+1} (n+1)^b}{q^n n^b} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |q| \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^b = |q|.$$

Puisque  $|q| \neq 1$ , alors d'après le critère de d'Alembert, la série  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n n^b$  converge  $\Leftrightarrow |q| < 1$  sinon elle diverge grossièrement.

ii) Posons  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{S}_n = \sum_{k=1}^n \frac{2}{k^{\frac{8}{7}}}$ . Nous allons utiliser la même technique que pour la question vii) de l'exercice 2. La suite des  $(\mathcal{S}_n)$  est croissante, nous voulons démontrer qu'elle est bornée.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n &= 2 \left( 1 + \left( \frac{1}{2^{\frac{8}{7}}} + \frac{1}{3^{\frac{8}{7}}} \right) + \left( \frac{1}{4^{\frac{8}{7}}} + \frac{1}{5^{\frac{8}{7}}} \right) + \dots \right) \\ &\leq 2 \left( 1 + 2 \left( \frac{1}{2^{\frac{8}{7}}} + \frac{1}{4^{\frac{8}{7}}} + \dots \right) \right) \\ &= 2 \left( 1 + \frac{2}{2^{\frac{8}{7}}} \left( 1 + \frac{1}{2^{\frac{8}{7}}} + \dots \right) \right) \\ &= 2 \left( 1 + \frac{\mathcal{S}_n}{2^{\frac{8}{7}}} \right) \end{aligned}$$

Et ainsi

$$\mathcal{S}_n \leq \frac{2}{1 - \frac{1}{2^{\frac{8}{7}}}}$$

Ce qui prouve que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{\frac{8}{7}}}$  converge.

*Remarque.* Exercice 8 montre que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  converge pour tout  $p > 1$ .

$$iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{3}} + n^{\frac{3}{5}}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}.$$

À partir de cette expression du majorant, on peut aisément appliquer la même méthode que pour la question précédente car  $\frac{5}{3} > 1$  et ainsi conclure que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{3}} + n^{\frac{3}{5}}}$  converge.

iv) — Si  $a \geq 1$ , le terme général ne tend pas vers 0 et la série  $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^p}$  diverge grossièrement.

— Si  $p \in \mathbb{N}^*$  et si  $a < 1$ , alors par le critère de Cauchy on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^{n^p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{n^{p-1}}$ . Cette limite vaut 0 si  $p \geq 2$  et  $a$  si  $p = 1$ . Dans tous les deux cas, la série converge absolument.

v) Posons  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = \frac{P(n)}{n!}$ . Nous avons que  $\forall n \geq n_0$ ,  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{P(n+1)}{(n+1)!} \frac{n!}{P(n)} \right| = \left| \frac{P(n+1)}{(n+1)P(n)} \right|$ .

Or,  $\deg(P(n+1)) < \deg((n+1)P(n))$  donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$  et donc d'après le critère de d'Alembert,  $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{P(n)}{n!}$  converge absolument. Cela implique que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{n!}$  converge.

### Exercice 8.

La suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant décroissante, nous obtenons en regroupant les termes en paquets de  $2^k$  termes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

Toujours en utilisant l'argument de la décroissance de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et en regroupant les termes par paquets de  $2^k$  :

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3 + a_3 + a_4) + \cdots \geq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

Nous obtenons donc les inégalités suivantes pour les séries à termes positifs :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Ce qui est un argument suffisant pour conclure que les séries  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$  ont la même nature.

Ainsi, la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  a la même nature que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n$ . On reconnaît ici une série géométrique qui converge  $\Leftrightarrow \frac{1}{2^{p-1}} < 1 \Leftrightarrow p > 1$ .

□