

## Analyse I – Corrigé de la Série 5

### Exercice 1.

Q1 : FAUX :  $a_n = (-1)^n$  est bornée mais ne converge pas.

Q2 : VRAI :  $\forall n \in \mathbb{N} |a_n \sin(n)| \leq |a_n|$ . Or  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$  et a fortiori  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n \sin(n)| = 0$  puis  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sin(n) = 0$ .

Q3 : FAUX : Prendre  $a_n = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Q4 : VRAI : Une suite convergente est bornée (voir les Notes du cours 7).

Par définition de la convergence d'une suite vers une limite  $l$ ,  $\forall \eta > 0$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n > n_0 |a_n - l| \leq \eta$ . En prenant  $\varepsilon = \max(|l| + \eta, \max_{i \in [0, n_0]} \{|a_i|\})$ . On a bien le résultat attendu.

Q5 : VRAI : Prendre  $\delta = \varepsilon + |a|$  où  $\varepsilon$  correspond à celui de la question précédente.

Q6 : FAUX : Prendre  $a_n = n$  et  $b_n = -\frac{n}{3}$ .

Q7 : FAUX : Même contre-exemple que précédemment.

Q8 : FAUX : Prendre  $a_n = (n+1)^2$  et  $b_n = \frac{1}{n+1}$ .

Q9 : VRAI : On a  $b_n = \frac{a_n b_n}{a_n}$ , où les deux suites  $(a_n b_n)$  et  $(a_n)$  sont convergentes et  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \neq 0$ . Alors la suite  $(b_n)$  converge.

Q10 : VRAI : Si  $(a_n)$  converge, alors la suite  $(|a_n|)$  converge aussi. Puis on utilise la linéarité de la limite.

Q11 : FAUX : Prendre  $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$  et  $b_n = \frac{1}{n+1}$ .

Q12 : VRAI : Raisonnons par contraposée. Supposons que  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel non nul et sachant que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, alors par opérations usuelles sur les limites,  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  converge.

Q13 : FAUX : Prendre  $a_n = b_n = n$ .

### Exercice 2.

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 3n + 2}{3n^2 + 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - 3\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{7}{n^2}} = \frac{5 - 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{3 + 7 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{5}{3}$$

ii) On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| (-1)^n \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{(\frac{1}{4} - \frac{1}{3})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{12}}} = 0,$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n}} = 0.$$

iii) On a

$$1 \leq \sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} \leq 1 + \frac{1}{n^2} \quad \xrightarrow{[\text{Th2G}]} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} = 1 ,$$

où [Th2G] dénote « par le théorème des deux gendarmes ». Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2}}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} .$$

### Exercice 3.

Pour  $0 < x < 1 < \frac{\pi}{2}$  on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} 0 \leq \sin(x) \leq x \leq \tan(x) &\quad \Rightarrow \quad 1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)} \quad \Rightarrow \quad \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1 \\ \Rightarrow \quad \cos(x)^2 \leq \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \leq 1 &\quad \Rightarrow \quad 1 - \sin(x)^2 \leq \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \leq 1 \\ \Rightarrow \quad 1 - x^2 \leq \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \leq 1 &\quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 - x^2} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1 . \end{aligned}$$

i) On a pour  $n \geq 2$  :

$$0 \leq \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \quad \xrightarrow{[\text{Th2G}]} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0 .$$

ii) On a d'abord pour  $n \geq 1$

$$1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2 \leq \sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2} \leq 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \quad \xrightarrow{[\text{Th2G}]} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2} = 1 ,$$

et ensuite

$$\sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2} \leq \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} \leq 1 \quad \xrightarrow{[\text{Th2G}]} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 .$$

iii) *Méthode 1* : Pour tout  $n \geq 2$  on a  $0 < \frac{2n+3}{n^3} < 1$  et donc

$$0 < n \sin\left(\frac{2n+3}{n^3}\right) < n \cdot \frac{2n+3}{n^3} = \frac{2n+3}{n^2} .$$

Puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{n^2} = 0 ,$$

on trouve par le théorème des deux gendarmes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \sin\left(\frac{2n+3}{n^3}\right) \right) = 0 .$$

*Méthode 2, fastidieuse mais applicable dans le cas plus général :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) \sin(q(n)) ,$$

où  $p(n), q(n)$  sont des fonctions rationnelles de  $n \in \mathbb{N}$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} q(n) = 0$ .

On a pour  $n \geq 2$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{2n+3}{n^3}\right)^2} \leq \frac{\sin\left(\frac{2n+3}{n^3}\right)}{\frac{2n+3}{n^3}} \leq 1.$$

Comme pour *ii*) on montre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \left(\frac{2n+3}{n^3}\right)^2} = 1,$$

d'où on trouve par le théorème des deux gendarmes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{2n+3}{n^3}\right)}{\frac{2n+3}{n^3}} = 1.$$

Donc

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \sin\left(\frac{2n+3}{n^3}\right) \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+3}{n^2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{2n+3}{n^3}\right)}{\frac{2n+3}{n^3}} \right) \\ &= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{n^2} \right) \cdot \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{2n+3}{n^3}\right)}{\frac{2n+3}{n^3}} \right) = 0 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

#### Exercice 4.

$$i) 0 \leq a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n} \left( \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1 \right)} \leq \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

On a donc d'après les théorèmes des gendarmes que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

*ii*) Rappelons d'abord que la valeur d'une limite ne dépend pas des premiers  $n_0$  termes avec  $n_0 \in \mathbb{N}^*$ . Rappelons aussi que (cf. Ex. 4 de la Série 4)

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

Pour  $n \geq 4$  on a donc

$$2^n \geq \binom{n}{3},$$

ainsi que  $n-1 \geq \frac{n}{2}$  et  $n-2 \geq \frac{n}{2}$ , et on trouve

$$0 \leq a_n = \frac{n^2}{2^n} \leq \frac{n^2}{\binom{n}{3}} = \frac{n^2}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}} \leq \frac{n^2}{\frac{1}{6} \cdot n \cdot \frac{1}{2}n \cdot \frac{1}{2}n} = \frac{24}{n},$$

d'où  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$  par le théorème des deux gendarmes.

*iii*) On a

$$0 \leq a_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{n \cdot n \cdot n \cdots n} = \left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{2}{n}\right) \left(\frac{3}{n}\right) \cdots \left(\frac{n}{n}\right) \leq \frac{1}{n},$$

d'où  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$  par le théorème des deux gendarmes.

iv) Pour  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $m \geq 2$  on a

$$\frac{2}{m} \leq 1,$$

et donc

$$0 \leq a_n = \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{2}{n-2} \cdots \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{1} \leq \frac{2}{n} \cdot 2,$$

d'où  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$  avec le théorème des deux gendarmes.

### Exercice 5.

$$\begin{aligned} i) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \frac{n+2}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n+2}\right) = e^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^n\right)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right)^{-1} \frac{n-1}{n}\right) = e^{-1} = \\ &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

$$iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e \frac{1}{e} = 1$$

### Exercice 6.

- i) FAUX : Prendre  $a_n = (-1)^n$ ,  $l = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $n_0 = 0$ . La propriété *i)* est bien respectée mais  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas. Le problème est que "pour tout  $\varepsilon > 0$ " dans la définition de la limite est remplacé par "il existe  $\varepsilon > 0$ ". Supposons que la suite  $(a_n)$  est bornée,  $|a_n| \leq M$ . Alors il existe  $\varepsilon = M > 0$  tel que pour tout  $n \geq 0$ , on a  $|a_n| < \varepsilon$ . Donc toute suite bornée satisfait la condition *i)* avec  $l = 0$  et  $n_0 = 0$ .
- ii) FAUX : Prendre  $a_n = (-1)^n$  et  $l = 1$ . Alors pour tout  $\xi > 0$  et  $n_0 = 0$ , pour tout  $n = 2k$  naturels pairs, on a  $|a_{2k} - l| = |1 - 1| = 0 < \xi$ , mais la suite ne converge pas. Le problème est que "pour tout  $n \geq n_0$ " dans la définition de la limite est remplacé par "il existe une infinité des nombres naturels  $n \geq n_0$ ". Alors la propriété *ii)* nous dit qu'il existe un nombre infini d'éléments de la suite après  $n_0$  qui sont  $\varepsilon$ -proche de  $l$ . Mais il peut également exister un nombre infini d'éléments de la suite après  $n_0$  qui sont arbitrairement loin de  $l$ . La propriété *ii)* ne demande pas que tous les éléments de la suite après  $n_0$  soient  $\varepsilon$ -proche de  $l$ , et donc ne demande pas la convergence de la suite vers  $l$ , ce qui nous montre le contre-exemple mentionné.
- iii) VRAI : Il s'agit exactement de la définition de la limite d'une suite si l'on pose  $\varepsilon = 2x$ .
- iv) FAUX : Prendre  $a_0 = 1$ ,  $a_n = \frac{3}{n} \forall n \geq 1$  et  $\varepsilon = 2$ . On a  $|a_1 - 0| = 3 > \varepsilon$ . La suite  $a_n$  converge vers 0, mais la propriété *iv)* n'est pas respectée. Un autre exemple : prendre  $a_0 = 1$ ,  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \forall n \geq 1$ . La suite  $(a_n)$  converge vers 0. Mais si on prend  $\varepsilon = \frac{1}{3}$ , alors on a  $4 > \frac{1}{\varepsilon}$  et  $|a_4 - 0| = \frac{1}{2} > \varepsilon$ . En général, la propriété n'est pas respectée pour les suites qui convergent moins vite que  $\frac{1}{n}$ . Par contre, propriété *iv)* implique que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ . En effet, la propriété *iv)* nous dit que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $n_0 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ , on a  $|a_n - l| \leq \varepsilon$ . Donc la définition de la limite est satisfaite; mais de plus, la

propriété *iv*) demande que  $n_0$  dépend de  $\varepsilon$  de façon précise :  $n_0 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ . Cette propriété n'est pas satisfaite par des suites qui convergent lentement, comme par exemple la suite  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

**Exercice 7.**

$$i) \quad x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} (x_n - l) + l - x_n = (x_n - l) \left( \frac{1}{n+1} - 1 \right) = (l - x_n) \left( \frac{n}{n+1} \right).$$

Plusieurs cas apparaissent :

(a)  $x_0 < l$  :

Par récurrence immédiate on a que  $x_0 < l$  implique  $x_n < l$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , donc  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée par  $l$ . La suite est donc strictement croissante et majorée (elle est aussi minorée par  $x_0$ ). Par propriété,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc convergente.

(b)  $x_0 = l$  :

La suite est ici constante égale à  $x_0$ .

(c)  $x_0 > l$  :

Par récurrence immédiate on a que  $x_0 > l$  implique  $x_n > l$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et donc  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par  $l$ . La suite est ici strictement décroissante et minorée (elle est aussi majorée par  $x_0$ ). Par propriété,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc convergente.

On peut démontrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ . Notamment, on a

$$x_{n+1} - l = \frac{1}{n+1} (x_n - l) = \frac{1}{n+1} \frac{1}{n} (x_{n-1} - l) = \dots = \frac{1}{(n+1)!} (x_0 - l).$$

Par les propriétés des limites on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)!} (x_0 - l) = (x_0 - l) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)!} = (x_0 - l) \cdot 0 = 0$ , puisque  $0 < \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$  implique  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - l) = 0$ .

*ii*) Comme pour la question précédente, on a :

$$x_{n+1} - x_n = (l - x_n)(1 - a_n)$$

Par définition de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on a toujours comme précédemment  $(1 - a_n) > 0$ . Dès lors, nous sommes sous les mêmes hypothèses que précédemment. Nous pouvons donc tirer les mêmes conclusions, notamment, que la suite  $(x_n)$  est convergente. Par contre, il ne suit pas nécessairement que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ .