

Analyse I – Corrigé de la Série 13

Exercice 1.

i) Pour trouver le rayon de convergence on calcule la limite

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{2k+1} \right)^{2-1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{2k+1} \right)^2 \left(\frac{2k+1}{k} \right)^{\frac{1}{k}} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{2k+1} \right)^2 \lim_{k \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Alors $r = 4$ et on a $] - 4, 4[\subset D$.

Pour $x = 4$ on obtient

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{2k+1} \right)^{2k-1} 2^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2k+1}{k} \right) \left(\frac{2k}{2k+1} \right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{k} \right) \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2k} \right)^{2k}}.$$

Le terme général de cette série ne converge pas vers zéro :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{k} \right) \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2k} \right)^{2k}} = \frac{2}{e} \neq 0,$$

et donc la série diverge. Le même calcul montre que pour $x = -4$, le terme général de la série alternée $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{2k+1} \right)^{2k-1} 2^{2k} (-1)^k$ ne converge pas vers zéro et donc la série diverge. Le domaine de convergence de la série entière est $D =] - 4, 4[$.

ii) Pour trouver le rayon de convergence on calcule la limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)}{(k+3)3^{k+1}} \frac{(k+2)3^k}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)} = \frac{1}{3}.$$

Alors le rayon de convergence est $r = 3$, et on a $] - 1, 5[\subset D$.

Pour $x = 5$ on obtient la série numérique

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(k+2)3^k} 3^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k+2},$$

dont le terme général ne converge pas vers zéro : $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+2} = 1 \neq 0$. Le même argument montre que pour $x = -1$, le terme général de la série alternée

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(k+2)3^k} (-3)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k+2}$$

ne converge pas vers zéro. Finalement, $D =] - 1, 5[$.

iii) Pour trouver le rayon de convergence on calcule la limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)}{(k+3)^2} \frac{(k+2)^2 3^k}{3^{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \frac{(k+1)(k+2)^2}{k(k+3)^2} = \frac{1}{3}.$$

Alors le rayon de convergence est $r = 3$, et on a $] -1, 5[\subset D$.

Pour $x = 5$ on obtient la série numérique

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(k+2)^2} 3^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(k+2)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2-2}{(k+2)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{2}{(k+2)^2} \right).$$

Rappel que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ converge pour $p > 1$ et diverge autrement. Puisque la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2}$ diverge et la série $-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(k+2)^2}$ converge, la somme diverge. Par conséquent, $5 \notin D$.

Pour $x = -1$ on obtient la série alternée

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(k+2)^2} 3^k (-3)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{(k+2)^2}.$$

Pour étudier la convergence de cette série on utilise le critère de Leibniz : la limite $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^k k}{(k+2)^2} = 0$ et pour démontrer que la suite des valeurs absolues est décroissante, on considère la fonction $f(x) = \frac{x}{(x+2)^2}$, $x \geq 0$. La dérivée $f'(x) = \frac{(x+2)^2 - 2(x+2)x}{(x+2)^4} = \frac{2-x}{(x+2)^3} < 0$ pour tout $x > 2$. Alors la suite $b_k = \frac{k}{(k+2)^2}$ est décroissante pour $k \geq 3$, et la série alternée converge par le critère de Leibniz. Donc $-1 \in D$, et finalement on a $D = [-1, 5[$.

iv) Pour trouver le rayon de convergence on calcule la limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)}{(k+3)^3} \frac{(k+2)^3 3^k}{3^{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \frac{(k+1)(k+2)^3}{k(k+3)^3} = \frac{1}{3}.$$

Alors le rayon de convergence est $r = 3$, et on a $] -1, 5[\subset D$.

Pour $x = 5$ on obtient la série numérique

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(k+2)^3} 3^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(k+2)^3}.$$

Puisque pour tout $k \geq 0$, $\frac{k}{(k+2)^3} < \frac{k+2}{(k+2)^3} = \frac{1}{(k+2)^2}$, et la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)^2}$ converge, par le critère de comparaison la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(k+2)^3}$ converge aussi. Pour $x = -1$, la série alternée $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{(k+2)^3}$ converge absolument, et donc $-1 \in D$ et $5 \in D$. Finalement, $D = [-1, 5]$.

Exercice 2.

Posons $f(x) := \frac{1}{5+x^3}$ et $g(x) := e^{-2x}$. Alors, $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues et $g(x) \geq 0$ sur $[0, 1]$. De plus, les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont strictement décroissantes et positives sur $[0, 1]$: si $0 < x_1 < x_2 < 1$, on a $0 < f(x_2) < f(x_1)$ et $0 < g(x_2) < g(x_1)$, et alors le produit $f(x)g(x)$ est aussi une fonction positive et strictement décroissante : $0 < f(x_2)g(x_2) < f(x_1)g(x_1)$. Alors $M = f(0)g(0)$ est le maximum et $m = f(1)g(1)$ le minimum de la fonction $f(x)g(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Par le théorème de la moyenne on a

$$f(1)g(1) \cdot (1-0) \leq \int_0^1 \frac{e^{-2x}}{5+x^3} dx \leq f(0)g(0) \cdot (1-0) = \frac{1}{5}.$$

Puisque $e < 3$, on a $f(1)g(1) = \frac{e^{-2}}{6} > \frac{1}{54}$. De plus, la fonction est plus petit que $\frac{1}{5}$ et donc l'inégalité à droite est stricte, d'où le résultat.

Exercice 3.

Les primitives F sont définies à une constante $C \in \mathbb{R}$ près. La plupart des exemples suivent des formules élémentaires pour les dérivées.

$$i) F(x) = -\cos(x) + C$$

$$ii) F(x) = \sin(x) + C$$

$$iii) F(x) = -\ln(|\cos(x)|) + C$$

$$iv) F(x) = e^x + C$$

$$v) F(x) = \int \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + C = \cosh(x) + C$$

$$vi) F(x) = \int \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + C = \sinh(x) + C$$

$$vii) F(x) = x(\ln(x) - 1) + C$$

$$viii) F(x) = \ln(|x|) + C$$

$$ix) F(x) = \int (ax+b)^s dx = \frac{1}{a} \int a(ax+b)^s dx = \frac{1}{a(s+1)}(ax+b)^{s+1} + C \quad \text{car } (ax+b)' = a$$

et donc $F(x) = \frac{1}{a} \int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \frac{1}{a} \int f(t) dt$ avec $f(t) = t^s$ et $t = \varphi(x) = ax+b$.

$$x) F(x) = \int \frac{1}{1+x} dx - \int \frac{-1}{1-x} dx = \ln(|1+x|) - \ln(|1-x|) + C = \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + C$$

$$xi) F(x) = \int \frac{1}{(1+x)(1-x)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + C$$

$$xii) F(x) = -\int \frac{-2x}{1-x^2} dx = -\ln(|1-x^2|) + C \quad \text{car } (1-x^2)' = -2x \quad (\text{même idée qu'au } ix)$$

$$xiii) F(x) = \int \frac{1}{\tan(x)} dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx = \ln(|\sin(x)|) + C \quad \text{car } (\sin(x))' = \cos(x) \quad (\text{même idée qu'au } ix)$$

$$xiv) F(x) = \frac{1}{2} \int 2x \exp(x^2) dx = \frac{1}{2} \exp(x^2) + C \quad (\text{même idée qu'au } ix)$$

$$xv) F(x) = \int (ax^p + b)^s x^{p-1} dx = \frac{1}{ap} \int ap x^{p-1} (ax^p + b)^s dx = \frac{1}{ap(s+1)} (ax^p + b)^{s+1} + C$$

car $(ax^p + b)' = ap x^{p-1}$ (même idée qu'au ix)

Exercice 4.

La formule pour le changement de variable $x = \varphi(u)$ est $\int f(x) dx = \int f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$.

$$i) \text{ Pour } x = \varphi(u) = \sin(u) \text{ on a } f(\varphi(u)) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(u)}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2(u)}} = \frac{1}{\cos(u)} \text{ et } \varphi'(u) = \cos(u). \text{ Ainsi}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{\cos(u)}{\cos(u)} du = \int du = u + C = \arcsin(x) + C,$$

où on a utilisé que $u = \varphi^{-1}(x) = \arcsin(x)$.

ii) Pour $x = \varphi(u) = \tan(u)$ on a $f(\varphi(u)) = \frac{1}{1 + \tan^2(u)} = \frac{\cos^2(u)}{\cos^2(u) + \sin^2(u)} = \cos^2(u)$ et $\varphi'(u) = \frac{1}{\cos^2(u)}$. Ainsi

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{\cos^2(u)}{\cos^2(u)} du = \int du = u + C = \arctan(x) + C,$$

où on a utilisé que $u = \varphi^{-1}(x) = \arctan(x)$.

iii) Pour $x = \varphi(t) = \ln(t)$ on a $f(\varphi(t)) = \frac{1}{e^{\ln(t)} + 1} = \frac{1}{1+t}$ et $\varphi'(t) = \frac{1}{t}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{e^x + 1} dx &= \int \frac{1}{t(1+t)} dt = \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} dt = \ln(t) - \ln(t+1) + C \\ &= \ln\left(1 - \frac{1}{t+1}\right) + C = \ln\left(1 - \frac{1}{e^x + 1}\right) + C = -\ln(1 + e^{-x}) + C. \end{aligned}$$

où on a utilisé que $t = \varphi^{-1}(x) = e^x$.

iv) Pour $x = \varphi(t) = t^2 + 1$ on a $f(\varphi(t)) = (t^2 + 1)\sqrt{t^2 + 1 - 1} = t(t^2 + 1)$ et $\varphi'(t) = 2t$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x-1} dx &= \int 2t^2(t^2 + 1) dt = \int 2t^4 + 2t^2 dt = \frac{2t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + C \\ &= \frac{2(x-1)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C \end{aligned}$$

où on a utilisé que $t = \varphi^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$.

Exercice 5.

Pour calculer l'intégrale *i)*, on propose de la ramener à des intégrales standards. Pour calculer les intégrales *ii) - iii)* et *v) - viii)*, on propose de procéder par changement de variable. Notez qu'il n'y a pas de méthode absolue et que vous pouvez procéder de manière différente si vous le souhaitez.

i) On sépare la somme en deux termes

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+4}{1+x^2} dx &= \int \left(\frac{3x}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^2} \right) dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx + 4 \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{3}{2} \ln(1+x^2) + 4\arctan(x) + c. \end{aligned}$$

ii) Comme $(\cos(x))' = -\sin(x)$, on a

$$\frac{\sin(x)}{\cos^3(x)} = f(\varphi(x)) \cdot (-\varphi'(x)),$$

avec $t = \varphi(x) = \cos(x)$ et $f(t) = \frac{1}{t^3}$. Ainsi

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)} dx = - \int \frac{1}{t^3} dt = \frac{1}{2t^2} + C = \frac{1}{2\cos^2(x)} + C.$$

Autre méthode : Comme $(\operatorname{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$, on peut prendre $t = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et on a

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)} dx = \int t dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}\tan^2(x) + C.$$

Notez que $\frac{1}{2}\tan^2(x) = \frac{1 - \cos^2(x)}{2\cos^2(x)} = \frac{1}{2\cos^2(x)} - 1$, donc la différence entre les deux primitives est une constante.

iii) Comme

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{3}{4}x^2}},$$

on pose $x = \varphi(u) = \frac{2}{\sqrt{3}}u$ si bien que $\varphi'(u) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ et on obtient

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{3}{4}x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \arcsin(u) + C = \frac{\sqrt{3}}{3} \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C.$$

iv) En utilisant la définition du sinus hyperbolique, on a

$$\begin{aligned} \int \frac{\sinh(x)}{e^x+1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-x}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(1 - e^{-x})(1 + e^{-x})}{1 + e^{-x}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int (1 - e^{-x}) dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}e^{-x} + C. \end{aligned}$$

v) Posons $e^x = t$ et donc $x = \ln(t)$ et $dx = \frac{1}{t}dt$. On a

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx = \int \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt$$

Posons $u = \sqrt{t+1}$ et donc $t = u^2 - 1$ et $dt = 2udu$. On a

$$\begin{aligned} \int \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt &= \int \frac{2u(u^2-1)}{u} du = \int 2u^2 - 2 du = \frac{2u^3}{3} - 2u + C \\ &= \frac{2(t+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - 2\sqrt{t+1} + C = \frac{2(e^x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - 2\sqrt{e^x+1} + C \end{aligned}$$

vi) Posons $t = \ln(2x)$ et donc $x = \frac{e^t}{2}$ et $dx = \frac{e^t}{2}dt$. Ainsi

$$\int \frac{\ln(2x)}{x \ln(4x)} dx = \int \frac{t}{\frac{e^t}{2}(\ln(2)+t)} \frac{e^t}{2} dt = \int \frac{t}{\ln(2)+t} dt$$

Puis on obtient

$$\begin{aligned} \int \frac{t}{\ln(2)+t} dt &= \int \left(1 - \frac{\ln(2)}{\ln(2)+t}\right) dt \\ &= t - \ln(2) \ln|\ln(2)+t| + C \\ &= \ln(2x) - \ln(2) \ln|\ln(2x) + \ln(2)| + C \\ &= \ln(x) - \ln(2) \ln|\ln(x) + \ln(4)| + C. \end{aligned}$$

vii) Posons $t = \sqrt{e^x - 1}$. On a donc $x = \ln(t^2 + 1)$ et $dx = \frac{2t}{t^2 + 1} dt$. Ainsi,

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} dx = \int \frac{2t}{t(t^2 + 1)} dt = 2 \int \frac{dt}{1 + t^2} = 2 \arctan(t) + C = 2 \arctan(\sqrt{e^x - 1}) + C$$

viii) Posons $x = \sin(t)$ et donc $t = \arcsin(x)$ et $dx = \cos(t) dt$. Et ainsi

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{\sin^2(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} \cos(t) dt = \int \sin^2(t) dt = \int \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = \frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} + C \\ &= \frac{t}{2} - \frac{\sin(t) \cos(t)}{2} = \frac{\arcsin(x)}{2} - \frac{x \cos(\arcsin(x))}{2} + C \\ &= \frac{\arcsin(x) - x\sqrt{1-x^2}}{2} + C \end{aligned}$$

On utilise ici l'identité $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2}$.

Exercice 6.

i) En utilisant que $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, on observe que

$$\sin^5(x) = (1 - \cos^2(x))^2 \sin(x) = -f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

avec $t = \varphi(x) = \cos(x)$ et $f(t) = (1 - t^2)^2$.

Comme les bornes de x sont $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{\pi}{2}$, les bornes de t sont $a = \varphi(\alpha) = 1$ et $b = \varphi(\beta) = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(x))^2 \sin(x) dx &= - \int_1^0 (1 - t^2)^2 dt = \int_0^1 (1 - 2t^2 + t^4) dt \\ &= \left[t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \right]_0^1 = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

ii) On pose $x = \varphi(u) = u^2 - 1$, $\varphi'(u) = 2u$. Comme x varie entre $a = 2 = \varphi(\sqrt{3})$ et $b = 3 = \varphi(2)$, les bornes de u sont $\alpha = \sqrt{3}$ et $\beta = 2$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx &= 2 \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{u^2}{u^2 - 1} du = 2 \int_{\sqrt{3}}^2 \left(1 + \frac{1}{u^2 - 1} \right) du \\ &= 2 \int_{\sqrt{3}}^2 du + \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{u+1 - (u-1)}{(u+1)(u-1)} du \\ &= 2 \int_{\sqrt{3}}^2 du + \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{1}{u-1} du - \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{1}{u+1} du \\ &= \left[2u + \ln \left(\left| \frac{u-1}{u+1} \right| \right) \right]_{\sqrt{3}}^2 = 4 - 2\sqrt{3} + \ln \left(\frac{\sqrt{3}+1}{3(\sqrt{3}-1)} \right). \end{aligned}$$

iii) Le changement de variable à poser est $x = \varphi(u) = u^2$, $\varphi'(u) = 2u$. Comme x varie entre $a = \frac{\pi^2}{16} = \varphi(\frac{\pi}{4})$ et $b = \frac{\pi^2}{9} = \varphi(\frac{\pi}{3})$, les bornes de u sont $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et $\beta = \frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned} \int_{\pi^2/16}^{\pi^2/9} \cos(\sqrt{x}) dx &= 2 \int_{\pi/4}^{\pi/3} u \cos(u) du \stackrel{(*)}{=} 2 \left[u \sin(u) \right]_{\pi/4}^{\pi/3} - 2 \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin(u) du \\ &= 2 \left[u \sin(u) + \cos(u) \right]_{\pi/4}^{\pi/3} = 1 - \sqrt{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}, \end{aligned}$$

où on a intégré (*) par parties avec $f'(u) = \cos(u)$, $g(u) = u$.

Exercice 7.

Soit $u = x^{33}$, alors $du = 33x^{32}dx$. Si $x \in [0, \pi^{1/33}]$, alors $u \in [0, \pi]$. On obtient l'intégrale

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi^{1/33}} \sin(\sin(x^{33})) \cos(x^{33}) x^{32} dx &= \frac{1}{33} \int_0^\pi \sin(\sin(u)) \cos(u) du \\ &= \frac{1}{33} \left[-\cos(\sin(u)) \right]_0^\pi \quad \text{car } (\sin(u))' = \cos(u) \\ &= \frac{1}{33} \left(-\cos(\sin(\pi)) + \cos(\sin(0)) \right) \\ &= \frac{1}{33} (-\cos(0) + \cos(0)) = 0.\end{aligned}$$

Exercice 8.

(Q1) VRAI.

Démonstration par contraposée : Supposons que pour tout $c \in]a, b[$, on a $f'(c) > 0$. Alors f est strictement croissante sur $[a, b]$ par propriété (DZ §6.2.16).

(Q2) FAUX.

Prendre la fonction f définie sur $[a, b]$ telle que $f(x) = x^3$. On a bien $f'(x) = 0$ mais f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

(Q3) VRAI.

Puisque f change de monotonie sur $]a, b[$, alors il existe deux intervalles $[a_1, b_1]$ et $[a_2, b_2]$ inclus dans $]a, b[$ tels que f' est négative sur $[a_1, b_1]$ et positive sur $[a_2, b_2]$. Posons $c_1 \in [a_1, b_1]$ et $c_2 \in [a_2, b_2]$ et supposons pour fixer les idées $c_1 \leq c_2$. Ensuite, f étant de classe C^∞ sur $]a, b[$, sa dérivée f' est continue sur $]a, b[$. Nous pouvons donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à f' sur l'intervalle $[c_1, c_2]$ qui nous indique qu'il existe $c \in [c_1, c_2]$ tel que $f'(c) = 0$.

(Q4) VRAI.

f étant de classe C^∞ sur $[a, b]$, la fonction f'' est donc continue en $c \in [a, b]$.

Par définition de la continuité, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout y tel que $|y - c| \leq \alpha$, on aie $f''(y) > 0$.

De plus, la formule de Taylor appliqué à la fonction f nous donne

$$\begin{aligned}f(x) &= f(c) + f'(c)(x - c) + f''(c + \theta_x(x - c)) \frac{(x - c)^2}{2} \quad \text{où } \theta_x \in]0, 1[\\ &= f(c) + f''(c + \theta_x(x - c)) \frac{(x - c)^2}{2}\end{aligned}$$

Ainsi, en choisissant x tel que $|x - c| < \alpha$, on obtient $f(x) - f(c) \geq 0$ et f admet bien un minimum local au point de coordonnées $c, f(c)$.

(Q5) FAUX.

Prendre la fonction f définie sur $[a, b]$ telle que $f(x) = -x^4$. f admet un maximum global et donc local en $x = 0$ mais on a $f'(0) = f''(0) = 0$.

(Q6) FAUX.

On peut reprendre la même fonction de la question précédente. On a bien $f'(0) = f''(0) = 0$ mais f est concave car pour tout $x \in [a, b]$, $f''(x) = -12x^2 \leq 0$. Ainsi, $(0, 0)$ n'est pas un point d'inflexion à la courbe représentative de f .

(Q7) FAUX.

Prendre la fonction f définie sur $[a, b]$ telle que $f(x) = x^3 + x$. On a $f''(x) = 6x$ qui change de signe en 0. Donc $(0, 0)$ est bien un point d'inflexion à la courbe représentative de f mais $f'(0) = 1$.

(Q8) VRAI.

C'est la propriété DZ §6.5.4.

(Q9) VRAI.

(Voir Proposition DZ §6.5.5.) Démonstration par absurde. Supposons qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f''(c) > 0$ (on pourrait très bien choisir $f''(c) < 0$).

Puisque la fonction f est de classe C^∞ sur $]a, b[$, alors la fonction f'' est continue. Donc par définition, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout y tel que $|y - c| \leq \alpha$, on ait $f''(y) > 0$.

Nous pouvons écrire le développement de Taylor de la fonction f :

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + f''(c + \theta_x(x - c)) \frac{(x - c)^2}{2} \text{ où } \theta_x \in]0, 1[$$

Ainsi, en posant la fonction ψ , définie par $\psi(x) = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)$ comme fonction permettant de déterminer la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au point $(c, f(c))$, on obtient $\psi(x) = f''(c + \theta_x(x - c)) \frac{(x - c)^2}{2}$.

Pour tout x tel que $|x - c| \leq \alpha$, on obtient que $\psi(x)$ garde un signe constant, ce qui prouve que la fonction ne change pas de convexité.

(Q10) VRAI.

C'est la propriété DZ §6.6.3.

(Q11) FAUX.

Prendre la fonction f définie sur $[a, b]$ telle que $f(x) = x^4$. Alors $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc la fonction est convexe pour tout $x \in \mathbb{R}$, mais $f''(0) = 0$. (Voir DZ §6.6.4).