

## Analyse I – Corrigé de la Série 12

### Exercice 1.

Nous allons démontrer que les fonctions suivantes sont indéfiniment dérivables sur leur domaine de définition en explicitant leur dérivée n-ième.

i) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\sin^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ \cos(x) & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4} \\ -\sin(x) & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \\ -\cos(x) & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

La série de Mac-Laurin de la fonction sin est donc la suivante :

$$\sin(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

De plus, en posant pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $a_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ , on a d'après le critère de d'Alembert que

$$\left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| = \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \frac{(2n+1)!}{|x|^{2n+1}} = \frac{x^2}{2(2n+3)(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Et ce, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Ainsi,  $R = +\infty$ .

ii) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\cos^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ -\sin(x) & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4} \\ -\cos(x) & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \\ \sin(x) & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

La série de Mac-Laurin de la fonction cos est donc la suivante :

$$\cos(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

De plus, en posant pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $a_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ , on a d'après le critère de d'Alembert que

$$\left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| = \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{|x|^{2n}} = \frac{x^2}{2(2n+1)(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Et ce, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Ainsi,  $R = +\infty$ .

iii) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

La série de Mac-Laurin de la fonction exponentielle est donc la suivante :

$$e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

De plus, en posant pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $a_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ , on a d'après le critère de d'Alembert que

$$\left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Et ce, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Ainsi,  $R = +\infty$ .

iv) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$(e^{-x})^{(n)} = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } n \equiv 0 \text{ [2]} \\ -e^{-x} & \text{si } n \equiv 1 \text{ [2]} \end{cases}$$

La série de Mac-Laurin de la fonction  $x \mapsto e^{-x}$  est donc la suivante :

$$e^{-x} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

De plus, en posant pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $a_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n!}$ , on a d'après le critère de d'Alembert que

$$\left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Et ce, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Ainsi,  $R = +\infty$ .

v) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\text{sh}^{(n)}(x) = \begin{cases} \text{sh}(x) & \text{si } n \equiv 0 \text{ [2]} \\ \text{ch}(x) & \text{si } n \equiv 1 \text{ [2]} \end{cases}$$

La série de Mac-Laurin de  $\text{sh}(x)$  est donc la suivante :

$$\text{sh}(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

ce qui confirme que la fonction sinus hyperbolique est la partie impaire de l'exponentielle. De plus, en posant pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $a_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ , on a d'après le critère de d'Alembert que

$$\left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| = \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \frac{(2n+1)!}{|x|^{2n+1}} = \frac{x^2}{2(2n+3)(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Et ce, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Ainsi,  $R = +\infty$ .

vi) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\text{ch}^{(n)}(x) = \begin{cases} \text{ch}(x) & \text{si } n \equiv 0 \text{ [2]} \\ \text{sh}(x) & \text{si } n \equiv 1 \text{ [2]} \end{cases}$$

La série de Mac-Laurin de  $\text{ch}(x)$  est donc la suivante :

$$\text{ch}(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

ce qui confirme que la fonction cosinus hyperbolique est la partie paire de l'exponentielle.

De plus, en posant pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $a_n(x) = \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ , on a d'après le critère de d'Alembert que

$$\left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| = \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{|x|^{2n}} = \frac{x^2}{2(2n+1)(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Et ce, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Ainsi,  $R = +\infty$ .

vii) Pour tout  $x \in ]-1, +\infty[$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\ln^{(n)}(1+x) = \begin{cases} -\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} & \text{si } n \equiv 0 \text{ [2]} \\ \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} & \text{si } n \equiv 1 \text{ [2]} \end{cases}$$

La série de Mac-Laurin de la fonction  $x \mapsto \ln(1+x)$  est donc la suivante :

$$\ln(1+x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

De plus, pour le rayon de convergence on a

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{n+1}{(-1)^{n+2}} \right| = 1.$$

Ainsi,  $R = 1$ .

viii) Pour tout  $x \in ]-\infty, 1[$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\ln^{(n)}(1-x) = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$$

La série de Mac-Laurin de la fonction  $x \mapsto \ln(1-x)$  est donc la suivante :

$$\ln(1-x) = -\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$$

De plus, pour le rayon de convergence on a

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = 1.$$

Ainsi,  $R = 1$ .

ix) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$((1+x)^m)^{(n)}(x) = \left( \prod_{i=0}^{n-1} (m-i) \right) (1+x)^{m-n}$$

La série de Mac-Laurin de la fonction  $x \mapsto (1+x)^m$  est donc la suivante :

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{m(m-1)\dots(m-(n-1))}{n!} x^n$$

Posons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $a_n(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{m(m-1)\dots(m-(n-1))}{n!} x^n$ .

Si  $m \notin \mathbb{N}$ , alors pour le rayon de convergence on a

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} \frac{(n+1)!}{m(m-1)\dots(m-n)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{m-n} \right| = 1.$$

On a  $R = 1$  si  $m \notin \mathbb{N}$  et  $R = +\infty$  sinon car la série devient une somme finie.

### Exercice 2.

Notez que dans les exemples ci-dessous on peut échanger la dérivation et la somme infinie pour tout  $x$  dans l'intérieur du domaine de convergence de la série entière. Pour la série de

Mac-Laurin  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  on a donc

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{dx} (x^n), \quad x \in ]-R, R[.$$

$$i) \frac{d}{dx} e^x = \frac{d}{dx} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x$$

$$ii) \frac{d}{dx} \sin(x) = \frac{d}{dx} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos(x)$$

$$iii) \frac{d}{dx} \cos(x) = \frac{d}{dx} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} = -\sin(x)$$

$$iv) \frac{d}{dx} \ln(1+x) = \frac{d}{dx} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}, \quad |x| < 1 \text{ (série géométrique)}$$

### Exercice 3.

Le développement limité d'ordre 3 autour du point  $a$  d'une fonction  $f$  de classe  $C^4$  est donné par la formule

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} (x-a)^3 + R_3(x),$$

où  $R_3(x) = \frac{f^{(4)}(u)}{4!} (x-a)^4$  pour un certain  $u$  entre  $a$  et  $x$ .

i) On calcule les dérivées de  $f$  :

$$f'(x) = 3 \cos(3x), \quad f''(x) = -9 \sin(3x), \quad f'''(x) = -27 \cos(3x), \quad f^{(4)}(x) = 81 \sin(3x)$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 3, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -27.$$

Donc le développement limité de  $f$  d'ordre 3 autour de 0 est

$$f(x) = \sin(3x) = 0 + 3x + 0 \cdot x^2 - \frac{27}{3!}x^3 + R_3(x) = 3x - \frac{27}{3!}x^3 + R_3(x) = 3x - \frac{9}{2}x^3 + R_3(x),$$

$$\text{avec } R_3(x) = \frac{81 \sin(3u)}{4!} x^4 = \frac{27 \sin(3u)}{8} x^4 \text{ pour un certain } u \text{ entre } 0 \text{ et } x.$$

ii) On calcule

$$f'(x) = \frac{1}{2+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(2+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(2+x)^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(2+x)^4}$$

$$f(0) = \ln(2), \quad f'(0) = \frac{1}{2}, \quad f''(0) = -\frac{1}{4}, \quad f'''(0) = \frac{1}{4}.$$

Ainsi, le développement limité de  $f$  d'ordre 3 autour de 0 est

$$f(x) = \ln(2+x) = \ln(2) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + R_3(x)$$

$$\text{avec } R_3(x) = -\frac{6}{4!(2+u)^4} x^4 = -\frac{1}{4(2+u)^4} x^4 \text{ pour un certain } u \text{ entre } 0 \text{ et } x.$$

iii) Comme  $\sin(x) \cos(x) = 1/2 \sin(2x)$ , on a

$$f'(x) = 1/2 \cdot 2 \cos(2x) = \cos(2x), \quad f''(x) = -2 \sin(2x), \quad f'''(x) = -4 \cos(2x),$$

$$f^{(4)}(x) = 8 \sin(2x).$$

Alors on a

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -4, \quad f^{(4)}(0) = 0.$$

$$\sin(x) \cos(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + R_3(x)$$

$$\text{avec } R_3(x) = \frac{f^{(4)}(u)}{4!} x^4 = \frac{1}{3} \sin(2u) x^4 \text{ pour un certain } u \text{ entre } 0 \text{ et } x.$$

#### Exercice 4.

i)

$$\begin{aligned} \ln(\cos(x)) &= \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \varepsilon(x) x^4\right) \\ &= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \varepsilon(x) x^4\right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \varepsilon(x) x^4\right)^2 \\ &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \varepsilon(x) x^4 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\exp(\sin(x)) &= \exp\left(x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)x^4\right) \\ &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)x^4\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)x^4\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)x^4\right)^3 \\ &\quad + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)x^4\right)^4 + \varepsilon(x)x^4 \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \varepsilon(x)x^4 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \varepsilon(x)x^4\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \sin(x)} &= \left(1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)x^4\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)x^4\right) - \frac{1}{8}\left(x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)x^4\right)^2 + \frac{1}{16}\left(x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)x^4\right)^3 \\ &\quad - \frac{5}{128}\left(x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)x^4\right)^4 \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \varepsilon(x)x^4 \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + \frac{x^4}{384} + \varepsilon(x)x^4\end{aligned}$$

iv) Tout d'abord, effectuons une décomposition en éléments simples de la fonction  $f$ . On sait que  $f$  peut s'écrire de la forme suivante :

$$f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+2x}$$

où  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ . Donc on a  $A + B = 3$  et  $2A - B = 0$ , d'où  $A = 1$  et  $B = 2$ . Ainsi, on a

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+2x}$$

Il ne nous reste plus qu'à additionner les deux développements limités des fractions rationnelles obtenues :

$$\begin{aligned}f(x) &= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \varepsilon(x)x^4) + 2(1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + 16x^4 + \varepsilon(x)x^4) \\ &= 3 - 3x + 9x^2 - 15x^3 + 33x^4 + \varepsilon(x)x^4\end{aligned}$$

v) Ici, il suffit juste de remplacer  $x$  par  $x^2$  dans le développement limité usuel de la fonction exponentielle.

$$e^{x^2} = \sum_{k \geq 0}^n \frac{x^{2k}}{k!} + \varepsilon(x)x^{2n}$$

vi)

$$\begin{aligned}\ln(1+x-2x^2) &= (x-2x^2) - \frac{1}{2}(x-2x^2)^2 + \frac{1}{3}(x-2x^2)^3 - \frac{1}{4}(x-2x^2)^4 + \varepsilon(x)x^4 \\ &= x - 2x^2 - \frac{x^2}{2} + 2x^3 - 2x^4 + \frac{x^3}{3} - 2x^4 - \frac{x^4}{4} + \varepsilon(x)x^4 \\ &= x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{7x^3}{3} - \frac{17x^4}{4} + \varepsilon(x)x^4\end{aligned}$$

vii) Comme dans l'Exercice 3. ii), il nous faut transformer  $f$  pour la faire ressembler à une forme usuelle :

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} = \frac{x}{9} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}$$

Et donc,

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x}{9} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{9^k} + \varepsilon(x)x^{2n+1} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{9^{k+1}} + \varepsilon(x)x^{2n+1}\end{aligned}$$

### Exercice 5.

On utilise que le développement de  $f(z) = \frac{1}{1-z}$  en série entière est  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$  pour tout  $z \in ]-1, 1[$ .

i) On peut récrire

$$f(x) = \frac{2}{3+4x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{4}{3}x}.$$

Ainsi, en posant  $z := -\frac{4}{3}x$ , on obtient que son développement en série entière est

$$f(x) = \frac{2}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{4}{3}\right)^n x^n \quad \text{pour } x \in \left]-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right[.$$

ii) De façon similaire, on peut récrire

$$f(x) = \frac{2}{3+4x} = \frac{2}{11+4(x-2)} = \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{1+\frac{4}{11}(x-2)}$$

de telle sorte qu'en posant  $z := -\frac{4}{11}(x-2)$ , on obtient que son développement en série entière est

$$f(x) = \frac{2}{11} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{4}{11}\right)^n (x-2)^n,$$

avec intervalle de convergence  $]-\frac{3}{4}, \frac{19}{4}[$  (obtenue à partir de  $z = -\frac{4}{11}(x-2) \in ]-1, 1[$ ).

*Remarque générale :* On peut aussi calculer le rayon de convergence de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  en utilisant la formule

$$r = 1 \left/ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right. \quad \text{ou} \quad r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \quad (1)$$

si ces limites existent.

**Exercice 6.**

Si  $f \in C^\infty(I)$  et si  $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  dans le développement limité de  $f$  en  $a \in I$ , la série de Taylor de  $f$  en  $a$  est donnée par  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$  pour  $x \in I$ .

i) On a  $f^{(n)}(x) = 2^n \cdot e^{2x+1}$  et  $f^{(n)}(0) = 2^n \cdot e$ . Ainsi le développement limité d'ordre  $n$  de  $f$  autour de  $a = 0$  est

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{2^k e}{k!} x^k + R_n(x) \quad \text{avec} \quad R_n(x) = \frac{2^{n+1} \cdot e^{2u+1}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{pour un certain } u \text{ entre } 0 \text{ et } x.$$

En outre, étant donné que pour  $x$  fixé

$$0 \leq |R_n(x)| \leq \frac{2^{n+1} \cdot e \cdot \max\{e^{2x}, 1\}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2|x|)^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

il suit que  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Comme en plus  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ , la série de Taylor de  $f$  autour de  $a = 0$  est donnée par

$$f(x) = e^{2x+1} = e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

et son rayon de convergence est  $r = \infty$ .

ii) Méthode 1 : Considérer  $f(x)$  comme somme d'une série géométrique. On obtient

$$f(x) = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3+(x-2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{3}(x-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (x-2)^n$$

qui converge vers la fonction  $f(x) = \frac{1}{x+1}$  si et seulement si  $-1 < -\frac{1}{3}(x-2) < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 5$ .

Méthode 2 : On utilise directement la formule de Taylor. On calcule que

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+1)^{n+1}} \quad \text{et} \quad f^{(n)}(2) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{3^{n+1}}.$$

D'où le développement limité d'ordre  $n$  de  $f(x)$  autour de 2 :

$$f(x) = \frac{1}{x+1} = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{3^{k+1}} (x-2)^k}_{=f_n(x)} + R_n(x)$$

où  $R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{u+1} \left(\frac{x-2}{u+1}\right)^{n+1}$  pour un certain  $u$  entre 2 et  $x$ .

On calcule le rayon de convergence par la formule générale (1) (en fait, on ne peut pas facilement démontrer la convergence du reste  $R_n$  vers 0 dans ce cas) :

$$r = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|3^{-(n+1)}|} \right)^{-1} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{-(1+\frac{1}{n})} \right)^{-1} = 3.$$

Donc  $f_n$  converge sur  $] -1, 5[$ , et il faut encore examiner la convergence aux bornes. Comme  $f$  n'est pas définie en  $x = -1$ ,  $f_n$  ne peut converger en ce point (notez pourtant que  $f_n(-1)$  existe). Pour  $x = 5$ , on a  $f_n(5) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{3}$  qui n'admet pas de limite lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

Ainsi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (x-2)^n$$

converge pour  $-1 < x < 5$ .

### Exercice 7.

Il faut choisir l'ordre des développements limités tel que l'on puisse éliminer le dénominateur. Comme on s'intéresse seulement à des limites, il suffit que l'on obtienne finalement un reste en  $\varepsilon(x)$  (garder plus de termes conduirait seulement à plus de calculs).

i) Comme

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \varepsilon(x)x^5 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^5} \left( x - \frac{x^3}{6} - \sin(x) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{120} + \frac{\varepsilon(x)x^5}{x^5} \right) = -\frac{1}{120},$$

puisque  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow 0$ .

ii) Comme

$$x - \ln(1+x) = x - x + \frac{x^2}{2} + \varepsilon(x)x^2 = \frac{x^2}{2} + \varepsilon(x)x^2,$$

et

$$e^x + \sin(x) - \cos(x) - 2x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x - 1 + \frac{x^2}{2} - 2x + \varepsilon(x)x^2 = x^2 + \varepsilon(x)x^2$$

on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin(x) - \cos(x) - 2x}{x - \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \varepsilon(x)x^2}{\frac{x^2}{2} + \varepsilon(x)x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{\varepsilon(x)x^2}{x^2}}{\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon(x)x^2}{x^2}} = 2.$$

iii) Pour le développement limité d'ordre 6 du numérateur, il faut obtenir le développement limité d'ordre 5 de  $\sin(\sin(x))$  et celui d'ordre 6 de  $\sin^2(x)$ .

Comme  $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \varepsilon(x)x^5$ , il s'ensuit que

$$\sin(\sin(x)) = \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \varepsilon(x)x^5 \right) - \frac{1}{6} \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \varepsilon(x)x^5 \right)^3 + \frac{1}{120} \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \varepsilon(x)x^5 \right)^5 + \varepsilon(x)x^5$$

où le dernier terme découle de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ .

Pour les puissances de  $\sin(x)$  on a :

$$\sin^2(x) = \left( x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \varepsilon(x)x^6 \right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + \varepsilon(x)x^6,$$

$$\sin^3(x) = \left( x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \varepsilon(x)x^5 \right)^3 = x^3 - \frac{x^5}{2} + \varepsilon(x)x^5,$$

$$\sin^5(x) = \left( x^2 - \frac{x^4}{3} + \varepsilon(x)x^5 \right) \left( x^3 - \frac{x^5}{2} + \varepsilon(x)x^5 \right) = x^5 + \varepsilon(x)x^5,$$

et donc

$$\begin{aligned} \sin(\sin(x)) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{1}{6} \left( x^3 - \frac{x^5}{2} \right) + \frac{x^5}{120} + \varepsilon(x)x^5 \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + \varepsilon(x)x^5. \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(\sin(x)) - \sin(x)^2}{x^6} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^6} \left( x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{10} - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{2x^6}{45} + \varepsilon(x)x^6 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{18} + \frac{\varepsilon(x)x^6}{x^6} \right) = \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

*iv)* Nous avons que

$$\begin{aligned} \ln(e^x - 2x) &= \ln \left( 1 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)x^3 \right) \\ &= \ln \left( 1 - \left( x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)x^3 \right) \right) \\ &= - \left( x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)x^3 \right) - \frac{1}{2} \left( x - \frac{x^2}{2} + \varepsilon(x)x^2 \right)^2 - \\ &\quad - \frac{1}{3} (x + \varepsilon(x)x)^3 = \\ &= -x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{3} + \varepsilon(x)x^3 = \\ &= -x + \frac{x^3}{3} + \varepsilon(x)x^3. \end{aligned}$$

Et donc,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \ln(e^x - 2x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} + \varepsilon(x) = \frac{1}{3}.$$

### Exercice 8.

*i)* Observons que  $\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$ . Ainsi, en utilisant les résultats de l'Exercice 1., on obtient

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) &= \left( -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) - \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right) + \varepsilon(x)x^5 \\ &= -2x - \frac{2x^3}{3} - \frac{2x^5}{5} + \varepsilon(x)x^5. \end{aligned}$$

ii) Méthode 1 : Utiliser l'égalité  $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$  et les développements limités d'ordre 5 de

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \varepsilon(x)x^5 \quad \text{et} \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \varepsilon(x)x^5.$$

ainsi que celui d'ordre 2 de

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \varepsilon(x)x^2.$$

Comme  $\cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \varepsilon(x)x^5$ , on obtient

$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \varepsilon(x)x^5\right) + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \varepsilon(x)x^5\right)^2 + \varepsilon(x)x^4 = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \varepsilon(x)x^4$$

et ainsi

$$\tan(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \varepsilon(x)x^5\right) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \varepsilon(x)x^5\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \varepsilon(x)x^5,$$

c'est-à-dire

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \varepsilon(x)x^5.$$

Méthode 2 : Utiliser la définition de la série Taylor et donc calculer les dérivées de  $f(x) = \tan(x)$  qui sont :

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \quad f''(x) = \frac{2 \sin(x)}{\cos^3(x)}, \quad f'''(x) = \frac{2 + 4 \sin^2(x)}{\cos^4(x)},$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{8 \sin(x) (2 + \sin^2(x))}{\cos^5(x)}, \quad f^{(5)}(x) = \frac{8 (2 + 11 \sin^2(x) + 2 \sin^4(x))}{\cos^6(x)},$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 2, \quad f^{(4)}(0) = 0, \quad f^{(5)}(0) = 16.$$

Ainsi

$$\tan(x) = \frac{1}{1!}x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{16}{5!}x^5 + \varepsilon(x)x^5 = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \varepsilon(x)x^5.$$

iii) On calcule

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \quad f'''(x) = \frac{8x^2}{(1+x^2)^3} - \frac{2}{(1+x^2)^2},$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-48x^3}{(1+x^2)^4} + \frac{24x}{(1+x^2)^3}, \quad f^{(5)}(x) = \frac{384x^4}{(1+x^2)^5} - \frac{288x^2}{(1+x^2)^4} + \frac{24}{(1+x^2)^3},$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -2, \quad f^{(4)}(0) = 0, \quad f^{(5)}(0) = 24.$$

Ainsi

$$\arctan(x) = \frac{1}{1!}x - \frac{2}{3!}x^3 + \frac{24}{5!}x^5 + \varepsilon(x)x^5 = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \varepsilon(x)x^5.$$

*Remarque.* Autrement on peut calculer la série de MacLaurin de  $\arctan(x)$  en intégrant celle de la fonction  $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , puisque on a  $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$ .

iv) On utilise que pour  $|x| < 1$  on a  $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \varepsilon(x)x^3$  avec  $\alpha = \frac{1}{2}$  et  $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \varepsilon(x)x^5$ . Soit  $t = \tan(x)$ . Alors

$$(1+t)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + \underbrace{\varepsilon(t)t^3}_{=\varepsilon(x)x^3},$$

où  $\varepsilon(t(x))t^3 = \varepsilon(x)x^3$  car  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$ . Comme

$$\tan^2(x) = \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \varepsilon(x)x^5\right)^2 = x^2 + \varepsilon(x)x^3$$

et

$$\tan^3(x) = (x^2 + \varepsilon(x)x^3) \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \varepsilon(x)x^5\right) = x^3 + \varepsilon(x)x^3$$

on a finalement

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \tan(x)} &= 1 + \frac{1}{2} \left(x + \frac{x^3}{3}\right) - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \varepsilon(x)x^3 = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{11x^3}{48} + \varepsilon(x)x^3 \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \varepsilon(x)x^2. \end{aligned}$$

### Exercice 9.

- i) 1)  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ ,  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$   
 2) Impaire  
 3)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$   
 4) Continue et dérivable sur  $D(f)$

$$f'(x) = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}, \quad D(f') = D(f) \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}, \quad D(f'') = D(f)$$

- 5) •  $f'(x) < 0$  pour tout  $x \in D(f')$ , donc pas de point stationnaire  
 •  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . On calcule alors  $f'''$  :

$$f'''(x) = -\frac{6(x^4 + 6x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^4} < 0 \quad \text{pour tout } x \in D(f).$$

Comme  $f'''(0) = -6 \neq 0$ ,  $f$  a un point d'inflexion en  $x = 0$ .

- 6) • Monotonie :

$x$	$] -\infty, -1[$	$] -1, 1[$	$] 1, \infty[$
$f'$	$< 0$	$< 0$	$< 0$
$f$	décroissante	décroissante	décroissante

Notez bien que  $f$  est strictement décroissante sur chacun des intervalles listés dans le tableau mais pas sur  $D(f)$ .

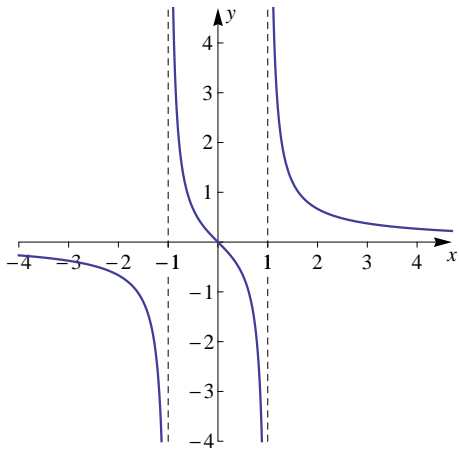


FIGURE 1 – Ex. 8(i)

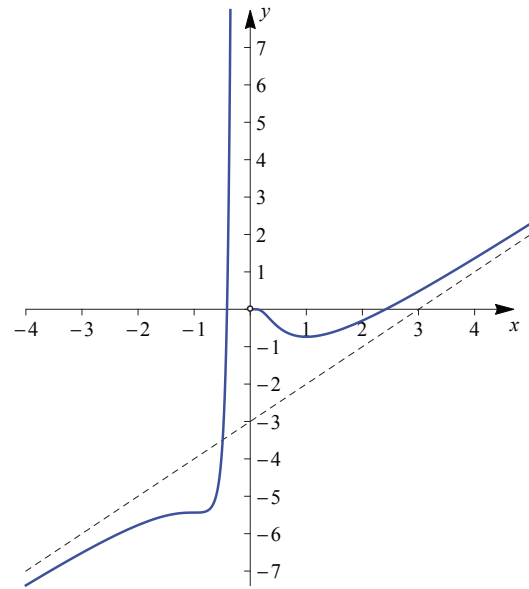


FIGURE 2 – Ex 8(ii)

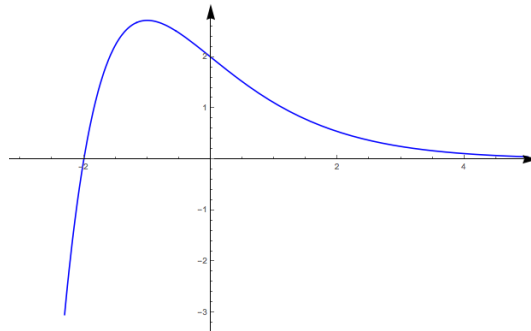


FIGURE 3 – Ex 8(iii)

- Convexité/concavité :

$x$	$] -\infty, -1[$	$] -1, 0[$	$] 0, 1[$	$] 1, \infty[$
$f''$	$< 0$	$> 0$	$< 0$	$> 0$
$f$	concave	convexe	concave	convexe

- 7) • Asymptotes verticales :  $f$  n'est pas définie en  $x = \pm 1$  et on a  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$ , donc des asymptotes verticales en  $x = \pm 1$ .

- Asymptote horizontale :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ , donc une asymptote horizontale en  $y = 0$ .

- 8) Le graphique de  $f$  est tracé à la Fig. 1.

ii) 1)  $D(f) = \mathbb{R}^*$ ,  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

- 2) ni paire, ni impaire

3)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$ .

4) continue et dérivable sur  $D(f)$ , donc  $D(f') = D(f'') = D(f)$

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x}} + \frac{x^2 - 2x - 1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4}\right) e^{-\frac{1}{x}} + \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3} \cdot \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^5} e^{-\frac{1}{x}}$$

5) •  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - x - 1 = (x-1)(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Donc  $f$  a des points stationnaires en  $x_1 = -1$  et  $x_2 = 1$ . Comme  $f'(x)$  ne change pas de signe en  $x_1$ , le point  $x_1 = -1$  n'est pas un extremum local. Par contre, on a  $f''(x_2) = \frac{4}{e} > 0$  et donc  $x_2$  est un minimum local.

•  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 1 = (3x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$  ou  $x = -1$

Ainsi  $x_1 = -1$  et  $x_3 = \frac{1}{3}$  sont candidats pour un point d'inflexion. Puisque  $f''$  change de signe en  $x_1$  et en  $x_3$ , ce sont des points d'inflexion. D'autre manière, on pourrait vérifier que  $f'''(x_1) \neq 0$  et  $f'''(x_3) \neq 0$ , où

$$f'''(x) = \left(-\frac{9}{x^4} - \frac{8}{x^5} + \frac{5}{x^6}\right) e^{-\frac{1}{x}} + \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^5} \cdot \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{-9x^3 - 5x^2 + 7x - 1}{x^7} e^{-\frac{1}{x}},$$

6) • Monotonie :

$x$	$] -\infty, -1[$	$] -1, 0[$	$] 0, 1[$	$] 1, \infty[$
$f'$	$> 0$	$> 0$	$< 0$	$> 0$
$f$	croissante	croissante	décroissante	croissante

• Convexité/concavité :

$x$	$] -\infty, -1[$	$] -1, 0[$	$] 0, \frac{1}{3}[$	$] \frac{1}{3}, \infty[$
$f''$	$< 0$	$> 0$	$< 0$	$> 0$
$f$	concave	convexe	concave	convexe

7) • Asymptote verticale :  $f$  n'est pas définie en  $x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty$ , donc une asymptote verticale en  $x = 0$ .

• Asymptote horizontale :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ , donc aucune

• Asymptote oblique :  $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$  et

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2 - 2x - 1}{x} - x e^{\frac{1}{x}} \right) e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2 - 2x - 1}{x} - x e^{\frac{1}{x}} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

Or,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$  et la première limite s'écrit

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( x(1 - e^{\frac{1}{x}}) - 2 - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} - 2 - \underbrace{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x}}_{=0} \\ &\stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} - 2 = -1 - 2 = -3 \end{aligned}$$

Ainsi  $b = -3$  et  $f$  a une asymptote oblique d'équation  $y = ax + b = x - 3$ .

8) Le graphique de  $f$  est tracé à la Fig. 2.

iii) 1)  $D(f) = \mathbb{R}$ ,  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$ .

2) ni paire, ni impaire.

3)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ .

4) Par opérations usuelles,  $f$  est continue et dérivable sur  $D(f)$  et  $D(f) = D(f') = D(f'')$ .

$$f'(x) = \frac{e^x - e^x(x+2)}{(e^x)^2} = -\frac{x+1}{e^x}$$

$$f''(x) = -\frac{e^x - e^x(x+1)}{(e^x)^2} = \frac{x}{e^x}$$

5) •  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Donc  $f$  a un point stationnaire en  $x = -1$ . Puisque  $f''(x_1) = -e < 0$ , alors  $f$  admet un maximum local en  $x = -1$ .

•  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

Étudions  $f'''$  en  $x = 0$  :

$$f'''(x) = \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}$$

Ainsi,  $f'''(0) = 1 \neq 0$ . Nous avons donc bien un point d'inflexion en  $x = 0$ .

6) • Monotonie :

$x$	] - \infty, -1[	] - 1, +\infty[
$f'$	$> 0$	$> 0$
$f$	croissante	décroissante

• Convexité/concavité :

$x$	] - \infty, 0[	] 0, +\infty[
$f''$	$< 0$	$> 0$
$f$	concave	convexe

7) • Asymptote horizontale :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

Ainsi, la droite d'équation  $y = 0$  est une asymptote à la courbe représentative de  $f$  en  $+\infty$ .

8) Le graphique de  $f$  est tracé à la Fig. 3.

### Exercice 10.

Q1 : FAUX.

Prendre par exemple  $f(x) = x + \sin(x)$  et  $g(x) = x$ . Dans ce cas on a  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} =$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin(x)}{x}\right) = 1$  mais  $\frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 + \cos(x)$  n'admet pas de limite à l'infini (et donc la dernière hypothèse de Bernoulli-l'Hospital n'est pas satisfaite).

Q2 : FAUX.

Prendre les fonctions de la question précédente.

Q3 : FAUX.

En posant par exemple  $f(x) = \sin(x) + 2$  et  $g(x) = 2x + 2$ , on obtient que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Alors que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{2}$$