

Analyse I – Corrigé de la Série 11

Exercice 1.

i) On distingue trois cas selon la valeur de m :

— $m = 0$: $f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

— $m \geq 1$: $f^{(n)}(x) = \begin{cases} m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)x^{m-n}, & n \leq m \\ 0, & n > m \end{cases}$

— $m \leq -1$: $f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

ii) On commence par calculer les quatre premières dérivées de f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cos(2x) - 2 \sin(x) & f''(x) &= -4 \sin(2x) - 2 \cos(x) \\ f'''(x) &= -8 \cos(2x) + 2 \sin(x) & f^{(4)}(x) &= 16 \sin(2x) + 2 \cos(x) \end{aligned}$$

Il faut donc distinguer deux cas selon la parité de $n \in \mathbb{N}^*$. On propose l'hypothèse :

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} (2^n \sin(2x) + 2 \cos(x)), & n \text{ pair} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} (2^n \cos(2x) - 2 \sin(x)), & n \text{ impair} \end{cases}$$

Démontrons cette formule par récurrence. L'initialisation est déjà achevée. Supposons que la formule est vraie pour tout $n \leq k \in \mathbb{N}^*$. Alors pour $n = k + 1$ on a :

Si k est pair,

$$(f^{(k)})'(x) = (-1)^{\frac{k}{2}} (2^k \cdot 2 \cos(2x) - 2 \sin(x)) = (-1)^{\frac{(k+1)-1}{2}} (2^{k+1} \cos(2x) - 2 \sin(x)) = f^{(k+1)}(x).$$

Si k est impair,

$$(f^{(k)})'(x) = (-1)^{\frac{k-1}{2}} (-2^n \cdot 2 \sin(2x) - 2 \cos(x)) = (-1)^{\frac{k+1}{2}} (2^{k+1} \sin(2x) + 2 \cos(x)) = f^{(k+1)}(x).$$

Alors la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

iii) Comme $f'(x) = x^{-1}$, on peut utiliser le résultat de i) avec $m = -1$ pour obtenir $f^{(n)}$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f^{(n)}(x) = (f')^{(n-1)}(x) = (-1)(-2)(-3)\cdots(-(n-1))x^{-1-(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

Exercice 2.

i) Le logarithme de f est

$$\ln(f(x)) = 2 \ln(x^2 + 1) + 3 \ln(x + 2) + 5 \ln(x - 1),$$

et en dérivant par rapport à x on trouve

$$\left(\ln(f(x)) \right)' = \frac{4x}{x^2 + 1} + \frac{3}{x + 2} + \frac{5}{x - 1}.$$

Comme $\left(\ln(f(x))\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$, on obtient

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \cdot \left(\ln(f(x))\right)' = f(x) \left(\frac{4x}{x^2+1} + \frac{3}{x+2} + \frac{5}{x-1}\right) \\ &= f(x) \frac{4x(x+2)(x-1) + 3(x^2+1)(x-1) + 5(x^2+1)(x+2)}{(x^2+1)(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{f(x)}{(x^2+1)(x+2)(x-1)} \left(4x(x^2+x-2) + 3(x^3-x^2+x-1) + 5(x^3+2x^2+x+2)\right) \\ &= (x^2+1)(x+2)^2(x-1)^4(12x^3+11x^2+7). \end{aligned}$$

ii) On a

$$\ln(f(x)) = \sum_{k=1}^{11} k \ln(1 + \sin^2(kx))$$

et donc

$$\left(\ln(f(x))\right)' = \sum_{k=1}^{11} k \frac{2k \sin(kx) \cos(kx)}{1 + \sin^2(kx)} = \sum_{k=1}^{11} \frac{k^2 \sin(2kx)}{1 + \sin^2(kx)}.$$

Il s'en suit que

$$f'(x) = \left(\ln(f(x))\right)' \cdot f(x) = \left(\sum_{k=1}^{11} \frac{k^2 \sin(2kx)}{1 + \sin^2(kx)}\right) \left(\prod_{k=1}^{11} (1 + \sin^2(kx))^k\right).$$

Exercice 3.

La dérivée de la fonction valeur absolue $g(x) = |x|$ étant connue pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

La fonction g n'étant pas dérivable en $x = 0$, ainsi

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + e^x, & x > 0 \\ -1 + e^x, & x < 0 \end{cases}$$

Notez que $f'(0)$ n'existe pas non plus.

Comme rappel, la Fig. 1 montre les graphiques des fonctions e^x et $|x|$. Les graphiques de f et f' sont donnés aux Fig. 2 et 3 respectivement.

Remarque : Les lignes hachurées dans les Fig. 2 et 3 sont les asymptotes à gauche de f et f' qui sont dues au fait que la fonction exponentielle admet une asymptote à gauche en $y = 0$.

Exercice 4.

Rappel : La dérivée de la fonction réciproque f^{-1} de f est donnée par (cf. cours)

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Toutes les fonctions f considérées sont des fonctions élémentaires injectives et dérivables sur les domaines donnés. Par un théorème du cours, la fonction réciproque f^{-1} est donc dérivable sur l'image de tout intervalle sur lequel f' ne s'annule pas.

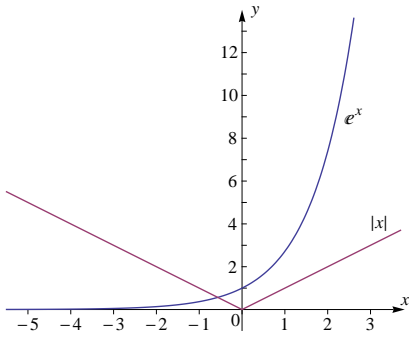


FIGURE 1 – e^x et $|x|$.

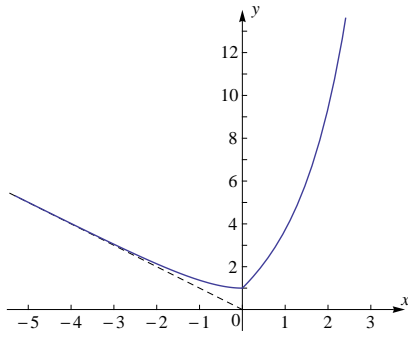


FIGURE 2 – $f(x)$.

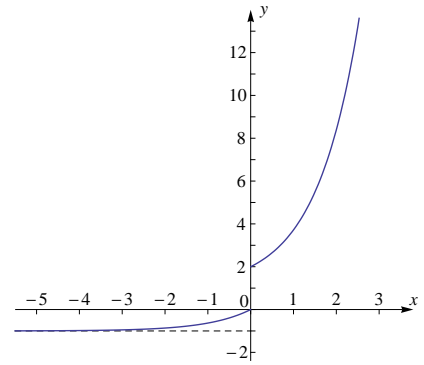


FIGURE 3 – $f'(x)$.

i) $f^{-1}(x) = \arctan(x)$, $D(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))}} = \cos^2(\arctan(x)) \stackrel{*}{=} \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$$

où il faut utiliser la trigonométrie pour obtenir l'expression en $\tan(x)$ à l'étape * :

$$\begin{aligned} \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - \tan^2(x) \cos^2(x) &\Leftrightarrow \cos^2(x) (1 + \tan^2(x)) = 1 \\ \Leftrightarrow \cos^2(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(x)} \end{aligned}$$

Le domaine de la dérivée est $D((f^{-1})') = \mathbb{R}$.

ii) $f^{-1}(x) = \arccos(x)$, $D(f^{-1}) = [-1, 1]$.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$D((f^{-1})') =]-1, 1[.$$

iii) $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $D(f^{-1}) = \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$D((f^{-1})') = \mathbb{R}_+^*.$$

iv) $f^{-1}(x) = x^{-\frac{1}{4}}$, $D(f^{-1}) = \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x^{-4}$.

$$(f^{-1})'(x) = -\frac{1}{\frac{4}{(x^{-\frac{1}{4}})^5}} = -\frac{x^{-\frac{5}{4}}}{4},$$

$$D((f^{-1})') = \mathbb{R}_+^*.$$

v) $f^{-1}(x) = -\ln(x)$, $D(f^{-1}) =]0, \infty[$.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{-e^{-(-\ln(x))}} = -\frac{1}{x}, \quad D((f^{-1})') =]0, \infty[.$$

vi) $f^{-1}(x) = -\log_2(x)$, $D(f^{-1}) =]0, \infty[$.

$$\text{On a } f'(x) = (2^{-x})' = (e^{-x \ln(2)})' = -\ln(2) e^{-x \ln(2)} = -\ln(2) 2^{-x}$$

$$\text{et donc } (f^{-1})'(x) = \frac{1}{-\ln(2) \cdot 2^{-(-\log_2(x))}} = -\frac{1}{x \ln(2)}, \quad D((f^{-1})') =]0, \infty[.$$

vii) $f^{-1}(x) = \operatorname{arsinh}(x)$, $D(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(\operatorname{arsinh}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad D((f^{-1})') = \mathbb{R}.$$

viii) $f^{-1}(x) = \operatorname{arcosh}(x)$, $D(f^{-1}) = [1, \infty[$.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sinh(\operatorname{arcosh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\operatorname{arcosh}(x)) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

$$D((f^{-1})') =]1, \infty[.$$

ix) $f^{-1}(x) = \operatorname{artanh}(x)$, $D(f^{-1}) =]-1, 1[$.

Comme $f'(x) = \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right)' = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)}$ on a

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2(\operatorname{artanh}(x))}} = \cosh^2(\operatorname{artanh}(x)) \stackrel{**}{=} \frac{1}{1 - \tanh^2(\operatorname{artanh}(x))} = \frac{1}{1 - x^2},$$

où l'étape ** et due à

$$\begin{aligned} \cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x) = 1 + \tanh^2(x)\cosh^2(x) &\Leftrightarrow \cosh^2(x)(1 - \tanh^2(x)) = 1 \\ &\Leftrightarrow \cosh^2(x) = \frac{1}{1 - \tanh^2(x)}. \end{aligned}$$

Le domaine de la dérivée est $D((f^{-1})') =]-1, 1[$.

Exercice 5.

- i) Comme $\frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{24} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{24}$, on va considérer la fonction $f(x) = \tan(x)$ sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{24}\right]$, où elle est continue et dérivable. Le théorème des accroissements finis nous indique qu'il existe $c \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{24}\right[$ tel que $\tan'(c) = \frac{\tan\left(\frac{5\pi}{24}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\pi}{24}}$.

En réarrangeant cette équation, nous obtenons

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{5\pi}{24}\right) &= \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{24}\tan'\left(\frac{\pi}{6} + \lambda\frac{\pi}{24}\right) \text{ où } \lambda \in]0, 1[\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{24}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{6} + \lambda\frac{\pi}{24}\right)} \end{aligned}$$

Il ne nous reste plus qu'à borner le terme $\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{6} + \lambda\frac{\pi}{24}\right)}$:

La fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$ étant croissante sur $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$, nous obtenons

$$\frac{4}{3} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)} \leq \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{6} + \lambda\frac{\pi}{24}\right)} \leq \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 2,$$

et ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{18} \leq \tan\left(\frac{5\pi}{24}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{12},$$

Il est à remarquer ici que l'encadrement obtenu est bien plus fin que si l'on avait simplement utilisé la croissance de la fonction $x \mapsto \tan(x)$ sur $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$.

En effet, on obtient numériquement avec notre encadrement que

$$0.75188\dots \leq \tan\left(\frac{5\pi}{24}\right) \leq 0.83914\dots$$

alors que l'on aurait obtenu

$$0.57735\dots = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) \leq \tan\left(\frac{5\pi}{24}\right) \leq \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

en utilisant la croissance de la fonction $x \mapsto \tan(x)$.

ii) (a) Pour que f soit bien définie, il faut et il suffit que les dénominateurs ne s'annulent pas.

Ainsi, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$.

(b) Par opérations usuelles, la fonction f est donc continue sur $] - 2, 4[$.

De plus, nous avons

$$f(-1) = 1 - \frac{1}{5^5} > 0 \text{ et } f(3) = \frac{1}{5^3} - 1 < 0$$

Ainsi, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe $c \in] - 1, 3[$ tel que $f(c) = 0$.

(c) Étudions la fonction f sur ses 3 domaines différents :

— $x < -2$:

$f(x)$ étant la somme de deux termes strictement négatifs, sa somme est strictement négative.

Il n'existe donc pas de réel $c \in] - \infty, -2[$ tel que $f(c) = 0$.

— $x > 4$:

De même, ici $f(x)$ est la somme de deux termes strictement positifs, sa somme est donc strictement positive.

Il n'existe donc pas de réel $c \in]4, +\infty[$ tel que $f(c) = 0$.

— $x \in] - 2, 4[$:

Supposons par l'absurde qu'il existe $(c, d) \in] - 2, 4[$ tel que $c < d$ (on peut sans perte d'information supposer cela et non le contraire) et $f(c) = f(d) = 0$.

Alors, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $e \in]c, d[$ tel que $f'(e) = 0$.

Or, pour tout $x \in] - 2, 4[$

$$f'(x) = -\left(\frac{3}{(x+2)^4} + \frac{5}{(x-4)^6}\right) < 0$$

On aboutit donc à une contradiction. Et ainsi, l'équation $f(x) = 0$ possède une seule solution dans \mathbb{R} .

iii) La fonction $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12x + s$ où $s \in \mathbb{R}$, est dérivable partout dans \mathbb{R} .

Supposons par l'absurde que f possède au moins 3 racines distinctes. Posons a, b et c trois d'entre elles telles que $a < b < c$.

Ainsi, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $(d, e) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f'(d) = f'(e) = 0$ et $d \neq e$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f'(x) = 12(x^3 - x^2 + x - 1) = 12(x - 1)(x^2 + 1)$$

On voit très clairement que f' ne s'annule que pour $x = 1$ et on arrive donc à une contradiction.

Ainsi, f admet bien au plus 2 racines dans \mathbb{R} .

iv) Puisque $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors f est continue sur $[-3, 3]$ et dérivable sur $] - 3, 3[$.

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $a \in] - 3, 3[$ tel que

$$f'(a) = \frac{f(3) - f(-3)}{3 - (-3)} = 1$$

De même, le théorème des accroissements finis nous indique qu'il existe $b \in]3, 10[$ tel que

$$f'(b) = \frac{f(10) - f(3)}{10 - 3} = 1$$

Ensuite, toujours car $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, nous avons que f' est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f''(c) = \frac{f'(b) - f'(a)}{b - a} = 0$$

Exercice 6.

Afin de calculer les limites demandées, on applique la règle de Bernoulli-l'Hôpital (abrégée par BL) une fois qu'on a vérifié ses hypothèses.

i) Posons $f(x) = \ln(x - 1)$ et $g(x) = x - 2$. Alors on a $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$ et $g'(x) = 1 \neq 0$. Les hypothèses de BL sont donc satisfaites et on a

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x - 1)}{x - 2} \stackrel{\text{BL}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x-1}}{1} = 1.$$

ii) Ici, on doit utiliser la règle BL plusieurs fois. Pour la première fois on pose $f(x) = \tanh(x) - 1$ et $g(x) = \frac{1}{x}$. Comme $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ et $g'(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0$, les hypothèses sont satisfaites. On peut donc appliquer BL une première fois (les hypothèses pour les étapes suivantes seront vérifiées ci-dessous) :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x (\tanh(x) - 1) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\tanh(x) - 1}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{BL}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\cosh(x)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\cosh^2(x)} \\ &\stackrel{\text{BL}}{=} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sinh(2x)} \stackrel{\text{BL}}{=} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2\cosh(2x)} = 0. \end{aligned}$$

Pour la deuxième application de BL on a $\tilde{f}(x) = x^2$ et $\tilde{g}(x) = \cosh^2(x)$ on a $\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{f}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{g}(x) = \infty$ et $g'(x) = 2\sinh(x)\cosh(x) = \sinh(2x) \neq 0$ pour $x \neq 0$ (ce qui est bien le cas lorsque $x \rightarrow \infty$).

Finalement pour la troisième fois avec $\bar{f}(x) = 2x$ et $\bar{g}(x) = \sinh(2x)$ et donc $\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{f}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{g}(x) = \infty$ ainsi que $\bar{g}'(x) = 2\cosh(2x) \neq 0$. On a donc bien pu appliquer BL les trois fois.

Remarque : On peut aussi appliquer la règle de Bernoulli-L'Hôpital à la limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x (\tanh(x) - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\frac{1}{\tanh(x) - 1}}.$$

pour obtenir le même résultat.

iii) On a $(1 + \sin(x))^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1 + \sin(x))\right)$. On va donc d'abord calculer la limite de l'exposant. Posons $f(x) = \ln(1 + \sin(x))$ et $g(x) = x$. Alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ et $g'(x) = 1 \neq 0$. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin(x))}{x} \stackrel{\text{BL}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)}}{1} = 1,$$

et par conséquent

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(x))^{1/x} = e^1 = e.$$

iv) Posons $f(x) = \tan(x) - \sin(x)$ et $g(x) = x - \sin(x)$.

Nous allons appliquer à plusieurs reprises la règle de Bernoulli l'Hôpital. Pour la première fois nous avons bien $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \tan(x) - \sin(x) = 0 - 0 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x - \sin(x)) = 0 - 0 = 0$, et $g'(x) \neq 0$ au voisinage de $x = 0$. Ainsi, d'après la règle de Bernoulli l'Hôpital nous avons (nous vérifierons les prochaines étapes ci-dessous) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\text{BL}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)} - \cos(x)}{1 - \cos(x)} \stackrel{\text{BL}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)} + \sin(x)}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\cos^3(x)} + 1 \right) = 3$$

Pour la seconde étape de Bernoulli l'Hôpital, nous avons bien que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos^2(x)} - \cos(x) \right) = 1 - 1 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos(x)) = 1 - 1 = 0$. La deuxième application de la règle de Bernoulli l'Hôpital était donc bien légitime.

$$v) \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right) = \frac{x \ln(x) - x + 1}{(x-1) \ln(x)}.$$

Posons $f(x) = x \ln(x) - x + 1$ et $g(x) = (x-1) \ln(x)$.

Nous allons appliquer à plusieurs reprises la règle de Bernoulli l'Hôpital. Pour la première fois nous avons bien $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x \ln(x) - x + 1) = 0 - 1 + 1 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \ln(x) = 0 \times 0 = 0$, et $g'(x) \neq 0$ au voisinage de $x = 1$. Ainsi, d'après la règle de Bernoulli l'Hôpital nous avons (nous vérifierons les prochaines étapes ci-dessous) :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\text{BL}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - 1 + 1}{\ln(x) + 1 - \frac{1}{x}} \stackrel{\text{BL}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

Pour la seconde étape de Bernoulli l'Hôpital, nous avons bien que $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) - 1 + 1 = 0 - 1 + 1 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\ln(x) + 1 - \frac{1}{x} \right) = 0 + 1 - 1 = 0$, et la dérivée du dénominateur n'est pas zéro au voisinage de $x = 1$. La deuxième application de la règle de Bernoulli l'Hôpital était donc bien légitime.

vi) On a que $x^{\pi x} = e^{\pi x \ln(x)}$ ($x > 0$). Calculons tout d'abord la limite de l'exposant.

Pour cela, posons $f(x) = \pi \ln(x)$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.

Nous avons bien $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \pi \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Ainsi, d'après la généralisation de la règle de Bernoulli l'Hôpital nous obtenons :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\text{BL}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\pi}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\pi x = 0$$

Et donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\pi x} = 1$$

vii) Posons $f(x) = 1 - \cos(x)$ et $g(x) = \tan(x)$.

Nous avons bien $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos(x)) = 1 - 1 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \tan(x) = 0$.

Ainsi, d'après la règle de Bernoulli l'Hôpital nous obtenons :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\text{BL}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = 0$$

$$\text{viii)} \left(x \tan(x) - \frac{\pi}{2 \cos(x)} \right) = \frac{2x \sin(x) - \pi}{2 \cos(x)}.$$

Posons $f(x) = 2x \sin(x) - \pi$ et $g(x) = 2 \cos(x)$.

Nous avons bien $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2x \sin(x) - \pi) = \pi - \pi = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 2 \cos(x) = 2 \times 0 = 0$. Ainsi, d'après la règle de Bernoulli l'Hôpital nous obtenons :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\text{BL}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} -\frac{\sin(x) + x \cos(x)}{\sin(x)} = -1$$

ix) Posons $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

Nous avons bien $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3}} = +\infty$. Ainsi, d'après la généralisation de la règle de Bernoulli l'Hôpital nous obtenons :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\text{BL}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^{-\frac{1}{3}} = 0$$

Exercice 7.

i) La fonction $f(x) = x(e^{1/x} - 1)$ est une fonction d'interpolation de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ donnée par $a_n = f(n)$, d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ (si cette limite existe). En posant $y = \frac{1}{x}$, il s'ensuit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

ii) Comme au point i), la fonction $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$ est une fonction d'interpolation de la suite $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. On va d'abord calculer la limite de l'exposant en posant $y = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 - y)}{y} \stackrel{\text{BL}}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} -\frac{1}{1 - y} = -1,$$

où on a pu utiliser BL parce que $\lim_{y \rightarrow 0^+} \ln(1-y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} y = 0$ et $y' = 1 \neq 0$.

Finalement, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{y \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{y}\right) = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Exercice 8.

i) Avant de calculer ses dérivées, on récrit f en distinguant les deux cas. On a

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + \frac{5}{4}, & -1 \leq x \leq -\frac{1}{4} \\ x^2 - x + \frac{3}{4}, & -\frac{1}{4} < x \leq 1 \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} 2x + 1, & -1 < x < -\frac{1}{4} \\ 2x - 1, & -\frac{1}{4} < x < 1 \end{cases}$$

Puisque $|x + \frac{1}{4}|$ n'est pas dérivable en $x = -\frac{1}{4}$, la fonction f n'est pas dérivable en ce point. De plus $f''(x) = 2$ pour tout $x \in]-1, -\frac{1}{4}[\cup]-\frac{1}{4}, 1[$.

Les extremums locaux et absolus sont donc parmi les points suivants :

- (a) Points stationnaires : $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$ ou $x_2 = \frac{1}{2}$. Comme $f''(x_1) = f''(x_2) > 0$, x_1 et x_2 sont des minimums locaux. On a $f(x_1) = 1$ et $f(x_2) = \frac{1}{2}$.
- (b) Points où f' n'existe pas : Le seul point à examiner est $x_0 = -\frac{1}{4}$. On déduit des signes de f' au voisinage de x_0 que x_0 est un maximum local. On a $f(x_0) = \frac{17}{16}$.
- (c) Extrémités du domaine de f : Comme f est continue sur $[-1, 1]$, on déduit des signes de f' au voisinage des extrémités (négatif vers -1 et positif vers 1) que f a des maximums locaux en $a = -1$ et $b = 1$. On a $f(a) = \frac{5}{4}$ et $f(b) = \frac{3}{4}$.

$$(a), (b), (c) \Rightarrow \begin{cases} \text{maximum global en } x = -1, & f(-1) = \frac{5}{4} \\ \text{minimum global en } x = \frac{1}{2}, & f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{cf. Fig. 4})$$

ii) Comme $2 - x < 0$ pour tout $x \in]2, 3[=: I$, il ne faut pas distinguer deux cas pour f . On a en effet

$$f(x) = (x-1)^2 + 2(2-x) = x^2 - 4x + 5 \quad \text{et} \quad f'(x) = 2(x-2) \quad \text{pour tout } x \in I$$

Les extremums locaux et globaux se trouvent de nouveau parmi les points suivants :

- (a) Points stationnaires : $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, donc aucun.
- (b) Points où f' n'existe pas : f' existe sur tout I , donc aucun.
- (c) Extrémités du domaine de f : Le domaine I est un intervalle ouvert et n'a donc pas d'extrémités.

Ainsi la fonction f ne possède ni d'extremum local ni absolu sur I (cf. Fig. 5).

Exercice 9.

Q1 : VRAI.

Résultat du cours (voir DZ § 5.2.16).

Preuve : Soient $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$. Par le théorème des accroissements finis il existe $u \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_2) - f(x_1) = f'(u)(x_2 - x_1)$. Puisque $f'(u) \geq 0$ il suit que $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, c.-à-d. f est croissante.

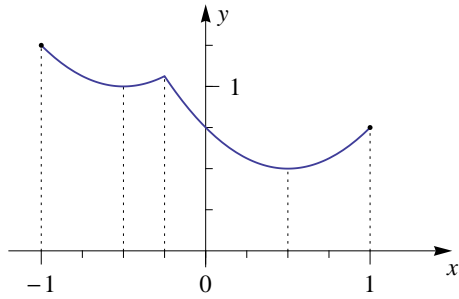


FIGURE 4 – Ex. 6(i)

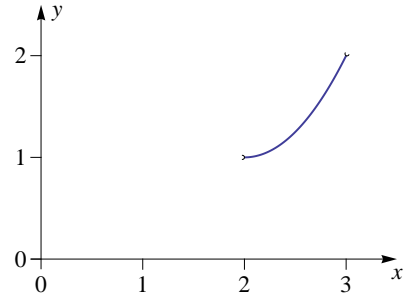


FIGURE 5 – Ex. 6(ii)

Q2 : VRAI.

Pour tout $x \in]a, b[$, la dérivée de f est par définition

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Comme f est croissante sur $[a, b]$, $f(x+h) - f(x)$ est du même signe que h . Ainsi le quotient dans la limite est toujours positif et donc $f'(x) \geq 0$.

Q3 : FAUX.

Prendre par exemple $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. Cette fonction est strictement croissante sur $[-1, 1]$ mais $f'(0) = 0$.

Q4 : VRAI.

Résultat du cours (voir DZ § 5.2.16). Preuve comme à la Q1 en remplaçant \geq par $>$.

Q5 : FAUX.

Prendre par exemple $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. Alors f a une tangente horizontale en $c = 0$ car $f'(0) = 0$ mais elle n'admet pas d'extremum en ce point car pour tout $\varepsilon > 0$ on a $f(-\varepsilon) = -\varepsilon^3 < f(0) = 0 < \varepsilon^3 = f(\varepsilon)$.