

Analyse I – Corrigé de la Série 10

Exercice 1.

Q1) : VRAI.

Le résultat est évident si $f(I)$ est réduit à un point. Sinon, soient y_1 et y_2 deux éléments de $f(I)$ avec $y_1 < y_2$. Il existe x_1 et x_2 dans I tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, tout élément de $[f(x_1), f(x_2)]$ est l'image d'un élément de $[x_1, x_2]$ ou de $[x_2, x_1]$ et donc $[y_1, y_2] = [f(x_1), f(x_2)] \subset f(I)$ qui est un intervalle.

Q2) : VRAI.

par le théorème de la valeur intermédiaire démontré dans le cours, voir DZ 4.3.22.

Q3) : FAUX.

Prendre par exemple $I =]0, 1]$ et f comme suit

$$\begin{aligned} f :]0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

On a alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} = +\infty$$

Q4) : FAUX.

Il suffit de prendre f une fonction constante pour s'en convaincre.

Q5) : FAUX.

D'après Q3)

Q6) : FAUX.

Posons

$$\begin{aligned} f : [a, b[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\sin\left(\frac{1}{x-b}\right)}{x-b} \end{aligned}$$

Cette fonction n'atteint jamais son maximum et minimum (qui sont d'ailleurs infinis).

Q7) : FAUX.

Si l'on pose

$$\begin{aligned} f : [a, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \sin(x) \end{aligned}$$

f n'atteint ni son minimum ni son maximum puisque la fonction n'est pas bornée.

Q8) : VRAI.

f étant continue, nous avons $f(I)$ un intervalle.

Supposons que $y_0 \in f(I)$. Alors il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = y_0$. Puisque I est ouvert, il existe $a > 0$ tel que $[x_0 - a, x_0 + a] \subset I$, et comme f est continue et strictement croissante, on a $[f(x_0 - a), f(x_0 + a)] \subset f(I)$. Alors pour tout point $y_0 \in f(I)$ il existe un intervalle $]f(x_0 - a), f(x_0 + a)[\subset f(I)$ qui contient y_0 , et donc $f(I)$ est un intervalle ouvert.

Exercice 2.

- i) Comme l'expression de f n'est pas définie en $x = 1$, on doit calculer sa limite en ce point. Pour $x \neq 1$, on peut écrire, en utilisant a que $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x}} \cdot \frac{\sqrt{1+2x} + \sqrt{3}}{\sqrt{1+2x} + \sqrt{3}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1-x}{2(x-1)} \cdot \frac{\sqrt{1+2x} + \sqrt{3}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x}} \right) = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+2x} + \sqrt{3}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

et donc le prolongement par continuité de f est

$$\tilde{f}: [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{3}}, & x \neq 1 \\ -\frac{\sqrt{6}}{4}, & x = 1 \end{cases}$$

Remarque : Le prolongement par continuité s'écrit en fait aussi sans distinction de cas :

$$\tilde{f}: [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+2x} + \sqrt{3}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x}}.$$

- ii) Comme l'expression de f n'est pas définie pour $x \in A \cup \{0\}$, il faut passer aux limites. Pour ceci, remarquons qu'on obtient pour $x \notin A \cup \{0\}$ avec un peu de trigonométrie

$$\tan\left(\frac{1}{x}\right) \left(1 - \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \tan\left(\frac{1}{x}\right) \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Soit $a_n = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^{-1} \in A$. Alors on a

$$\lim_{x \rightarrow a_n} f(x) = \lim_{x \rightarrow a_n} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^n \cdot 0 = 0,$$

c'est-à-dire f peut être prolongée par continuité pour tout $a \in A$. Pour $x = 0$ on a (en utilisant la formule $2 \sin(t) \cos(t) = \sin(2t)$) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2}{x}\right) \quad \text{qui n'existe pas.}$$

Comme la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas, f ne peut être prolongé par continuité en $x = 0$. Le prolongement par continuité de f est donc

$$\tilde{f}:]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} \tan\left(\frac{1}{x}\right) \left(1 - \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\right), & x \notin A \\ 0, & x \in A \end{cases}$$

ou, sans séparation des cas, $\tilde{f}:]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \tilde{f}(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

iii) L'expression de f n'étant pas définie pour $x = 1$, on veut calculer la limite. Comme le dénominateur de f s'écrit $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$ on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)\tan(x-1)}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)\tan(x-1)}{(x-1)^2(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x+2} \cdot \frac{\tan(x-1)}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x+2} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x+2} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin(x-1)}{(x-1)} \cdot \frac{1}{\cos(x-1)} \right) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(Attention : La décomposition en produit de deux limites à la deuxième ligne est valable parce que les deux limites existent.)

Ainsi le prolongement par continuité de f est

$$\tilde{f}: [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x(x-1)\tan(x-1)}{x^3 - 3x + 2}, & x > 1 \\ \frac{1}{3}, & x = 1 \end{cases}$$

Notez que ce prolongement par continuité ne s'écrit pas sans séparation des cas.

Exercice 3.

- i) On a $f(-x) = f(x)$. En dérivant les deux membres de cette égalité, on obtient $-f'(-x) = f'(x)$, c'est-à-dire f' est impaire.
- ii) On dérive $f(-x) = -f(x)$ pour obtenir $-f'(-x) = -f'(x) \Leftrightarrow f'(-x) = f'(x)$. Ainsi f' est paire.
- iii) Pour f périodique, il existe $T > 0$ tel que $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En dérivant, on a $f'(x+T) = f'(x)$ et donc f' est aussi périodique.

Exercice 4.

- i) $f'(x) = \frac{5(3x^2 - 1) - 6x(5x + 2)}{(3x^2 - 1)^2} = -\frac{15x^2 + 12x + 5}{(3x^2 - 1)^2}$; $D(f) = D(f') = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$
- ii) $f'(x) = \frac{2x\sqrt{1-x^2} - x^2 \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)}{1-x^2} = \frac{x(2-x^2)}{(1-x^2)^{3/2}}$; $D(f) = D(f') =]-1, 1[$
- iii) $f'(x) = 2 \sin(x) \cos(x) \cdot \cos(x^2) + \sin(x)^2 \cdot (-\sin(x^2)) \cdot 2x$
 $= 2 \sin(x) [\cos(x) \cos(x^2) - x \sin(x) \sin(x^2)]$; $D(f) = D(f') = \mathbb{R}$.
- iv) En appliquant la règle de dérivation d'un quotient à $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, on obtient

$$f'(x) = \frac{\cos(x)^2 - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}$$

et donc $D(f) = D(f') = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) = 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

v) Il s'agit de plusieurs composées de fonctions. Donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\sin(\sqrt{\sin(x)})}} \cos(\sqrt{\sin(x)}) \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\sin(x)}} \cos(x) \\ &= \frac{\cos(\sqrt{\sin(x)}) \cos(x)}{4 \cdot \sqrt{\sin(\sqrt{\sin(x)})} \cdot \sqrt{\sin(x)}}. \end{aligned}$$

Le domaine de f est

$$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sin(x) \geq 0 \text{ et } \sin(\sqrt{\sin(x)}) \geq 0 \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi].$$

En effet, $\sin(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$ et pour ces valeurs, on a $\sqrt{\sin(x)} \in [0, 1]$ si bien que $\sin(\sqrt{\sin(x)}) \geq 0$, c'est-à-dire f est bien définie.

Pour le domaine de f' , il faut encore exclure les points où $\sin(x) = 0$, c'est-à-dire

$$D(f') = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[.$$

$$vi) f'(x) = \frac{3}{5} (2x^4 + e^{-(4x+3)})^{-2/5} (8x^3 - 4e^{-(4x+3)}) = \frac{12(2x^3 - e^{-(4x+3)})}{5\sqrt[5]{(2x^4 + e^{-(4x+3)})^2}};$$

$D(f) = D(f') = \mathbb{R}$ (Le dénominateur de f' ne s'annule jamais parce que $e^{-(4x+3)} > 0$ et $x^4 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.)

vii) En appliquant la formule de dérivation pour les fonctions composées

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\ln(3) \log_2(x)} \times \frac{1}{x \ln(2)} \\ &= \frac{1}{\ln(3) \ln(2) x \log_2(x)} \\ &= \frac{1}{\ln(2) \ln(3) x} \cdot \frac{\ln(2)}{\ln(x)} = \frac{1}{\ln(3) x \ln(x)} \end{aligned}$$

Alors, $D(f) =]1, \infty[$ et $D(f') = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

viii) En observant que $f(x) = \sin(x) \ln(4) e^{\cos(4x)}$, on obtient

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln(4) \cos(x) e^{\cos(4x)} + \ln(4) \sin(x) \cdot (-4 \sin(4x)) \cdot e^{\cos(4x)} \\ &= \ln(4) e^{\cos(4x)} (\cos(x) - 4 \sin(x) \sin(4x)). \end{aligned}$$

$D(f) = D(f') = \mathbb{R}$

ix) Avant d'utiliser la formule de la dérivation d'un quotient, posons séparément les fonctions numérateur et dénominateur

$$\begin{aligned} n &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 3^x \cos(x) \end{aligned}$$

$$d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2^{\sqrt{x^2+1}}$$

$$n'(x) = \ln(3)3^x \cos(x) - 3^x \sin(x)$$

et

$$d'(x) = \ln(2)2^{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

On peut ainsi calculer plus aisément $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{(\ln(3)3^x \cos(x) - 3^x \sin(x)) 2^{\sqrt{x^2+1}} - \left(\ln(2)2^{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) 3^x \cos(x)}{2^{2\sqrt{x^2+1}}}$$

$$= \frac{\ln(3)3^x \cos(x) - 3^x \sin(x) - \ln(2) \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} 3^x \cos(x)}{2^{\sqrt{x^2+1}}}$$

$$= 3^x \frac{\cos(x) \left(\ln(3) - \ln(2) \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) - \sin(x)}{2^{\sqrt{x^2+1}}}$$

On a $D(f) = D(f') = \mathbb{R}$

Exercice 5.

i) Pour $m \leq 0$, f n'est pas continue en $x = 0$ et donc pas dérivable non plus. En effet, on a

$$\text{pour } m = 0 : \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \sin(1) \neq 0 = f(0),$$

$$\text{pour } m \leq -1 : \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x^{|m|}}\right) \text{ n'existe pas.}$$

Pour $m \geq 1$, f est continue en $x = 0$ (car $\sin(0) = 0$) et sa dérivée en ce point est

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^m)}{x} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} x^{m-1} \right) \cdot \underbrace{\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^m)}{x^m} \right)}_{=1} = \begin{cases} 1, & m = 1 \\ 0, & m \geq 2 \end{cases}$$

Ainsi f est dérivable en $x = 0$ pour tout $m \geq 1$.

La dérivée de f pour $x \neq 0$ est $f'(x) = mx^{m-1} \cos(x^m)$ et donc pour $m \geq 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \begin{cases} 1, & m = 1 \\ 0, & m \geq 2 \end{cases} = f'(0).$$

Ainsi f' est continue en $x = 0$ pour tout $m \geq 1$.

ii) On a

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{m-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} 0, & \text{si } m \geq 2 \\ \text{n'existe pas,} & \text{si } m \leq 1 \end{cases}$$

Donc f admet une dérivée au point $x = 0$ si et seulement si $m \geq 2$ et on va seulement considérer ce cas ci-après.

La dérivée pour $x \neq 0$ est donnée par

$$f'(x) = mx^{m-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^{m-2} \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Pour $m = 2$, la limite $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ n'existe pas car $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas (cf. Ex. 6iii Série 9).

Ainsi f' existe partout mais n'est pas continue en $x = 0$ dans ce cas.

Pour $m \geq 3$, la limite existe et on a $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 = f'(0)$. Donc f' est continue en $x = 0$.

Exercice 6.

- (a) En tant que fonction polynomiale, f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Il reste donc à étudier la dérivabilité de f en $x = 1$.

Une condition nécessaire pour la dérivabilité en $x = 1$ est la continuité en ce point, c'est-à-dire,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \alpha + \beta = 3. \quad (1)$$

La fonction f est dérivable en $x = 1$ si les dérivées à gauche et à droite en ce point sont égales.

$$f'_{\text{gauche}}(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 3 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1$$

$$f'_{\text{droite}}(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x + \beta - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x - \alpha + \overbrace{\alpha + \beta}^{=3 \text{ par (1)}} - 3}{x - 1} = \alpha,$$

Donc $f'_{\text{gauche}}(1) = f'_{\text{droite}}(1) \Leftrightarrow \alpha = 1$. Il suit alors de (1) que $\beta = 2$.

Ainsi la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3, & x \leq 1 \\ \alpha x + \beta, & x > 1 \end{cases}$ est dérivable sur \mathbb{R} si et seulement si $\alpha = 1$ et $\beta = 2$.

- (b) Une condition nécessaire pour la dérivabilité en $x = 0$ est la continuité en ce point.

4 cas se présentent selon α :

- 1) $\alpha = 0$:

$$\left| x^\alpha \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| = \left| \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

- 2) $\alpha \geq 1$:

$$\left| x^\alpha \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x^\alpha| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

- 3) $\alpha = -1$:

$$\left| x^\alpha \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| = \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right|$$

Or

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Mais

$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0

Ainsi, d'après les propriétés des limites, on a que $|x^\alpha \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)|$ n'a pas de limite en 0 pour $\alpha = -1$.

4) $\alpha \leq -2$:

$$\left|x^\alpha \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = \left|\frac{1}{x^{-\alpha-1}}\right| \left|\frac{\sin(x)}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \text{ où } -\alpha - 1 \geq 1$$

La suite $a_n = \frac{1}{2\pi n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ nous donne la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0$, et la suite $b_n = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ est telle que la suite $|f(b_n)|$ n'est pas bornée lorsque n tend vers l'infini. Alors $|x^\alpha \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)|$ n'a pas de limite en 0 pour $\alpha \leq -2$.

Finalement, f ne peut être continue que si $\alpha \geq 0$ et $\beta = 0$. Posons une fonction auxiliaire g

$$g(x) = \begin{cases} \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $\forall x \neq 0$:

$$g'(x) = \cos(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \sin(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2}$$

On remarque que pour $\alpha = 0$, $f(x) = g(x)$. Étudions donc la valeur de la dérivée en 0 de g

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Cette dernière limite n'existe pas puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas. Et ainsi, f n'est pas dérivable en $x = 0$ si $\alpha = 0$.

Posons maintenant $\alpha \geq 1$, $\forall x \neq 0$ on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha x^{\alpha-1} g(x) + x^\alpha g'(x) \\ &= \alpha x^{\alpha-1} \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^\alpha \left(\cos(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \sin(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} \right) \\ &= x^{\alpha-1} \left(\alpha \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x \cos(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\sin(x)}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right) \end{aligned}$$

ce qui est une fonction bien définie et continue pour tout $x \neq 0$. Étudions donc la dérivabilité de f en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} \left(\sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) = 0$$

pour tout $\alpha \geq 1$, car on a déjà vu que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Finalement, f est dérivable sur \mathbb{R} pour $\beta = 0$ et tout $\alpha \geq 1$, avec la dérivée continue sur \mathbb{R}^* .

Enfin pour étudier la continuité de la dérivée f' en $x = 0$, on calcule la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} \left(\alpha \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x \cos(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\sin(x)}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right).$$

En utilisant que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq 1, |\cos(x)| \leq 1, |\sin(x)| \leq |x| \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

On trouve que les deux premiers termes du membre entre parenthèses tendent vers 0 mais que le dernier terme n'a pas de limite en 0 mais est borné en valeur absolue par 1.

Ainsi, si $\alpha = 1$, f' n'a pas de limite en 0.

Si $\alpha \geq 2$, on a pour le dernier terme $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) (x^{\alpha-1} \cos(\frac{1}{x})) = 1 \cdot 0 = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 = f'(0)$, et la dérivée f' est continue en $x = 0$.

Donc $f'(x)$ est continue sur \mathbb{R} pour $\beta = 0$ et tout $\alpha \geq 2$.

Exercice 7.

Comme on a $(g \circ f)'(0) = g'(f(0)) \cdot f'(0)$, il faut calculer les dérivées de f et g dans les points concernés.

i) Pour calculer $f'(x)$, écrivons $f(x) = 2x + 3 + (e^x - 1)u(x)$ où $u(x) = \sin(x)^7 \cos(x)^4$. Alors

$$f'(x) = 2 + e^x u(x) + (e^x - 1)u'(x) \quad \text{et} \quad u'(x) = 7 \sin(x)^6 \cos(x)^5 - 4 \sin(x)^8 \cos(x)^3.$$

Ainsi $u(0) = u'(0) = 0$ et donc $f'(0) = 2$.

Ensuite on a $g'(x) = \frac{3 \ln(x)^2}{x}$. Puisque $f(0) = 3$ on trouve finalement

$$(g \circ f)'(0) = g'(3) \cdot f'(0) = \frac{3 \ln(3)^2}{3} \cdot 2 = 2 \ln(3)^2.$$

ii) Pour calculer $f'(0)$, il faut utiliser la définition de la dérivée :

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x}) + 2x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x \sin(\frac{1}{x}) + 2) = 2$$

car $\lim_{x \rightarrow 0} (x \sin(\frac{1}{x})) = 0$ comme on a montré dans le cours.

Comme $g'(x) = 4(x - 1)^3$ et $f(0) = 0$, on obtient

$$(g \circ f)'(0) = g'(0) \cdot f'(0) = (-4) \cdot 2 = -8.$$

Exercice 8.

Q1 : FAUX.

Prendre par exemple $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Cette fonction est continue en $x = 0$

parce qu'on a

$$0 \leq f(x) \leq x^2$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il suit par le théorème des deux gendarmes que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$.

Par contre f n'est pas continue ailleurs qu'en 0. En effet, soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'intervalle ouvert $]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}[$ contient des nombres rationnels et irrationnels.

En prenant $a_n \in]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}[\cap \mathbb{Q}$ et $b_n \in]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ pour chaque

$n \in \mathbb{N}^*$, on obtient deux suites $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ et $(b_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ qui convergent les deux vers x_0 quand $n \rightarrow \infty$. Mais

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = x_0^2 > 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n),$$

et donc f n'est pas continue en x_0 .

Pour voir que f est dérivable en $x = 0$, observer que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

et ainsi $-|x| \leq \frac{f(x)}{x} \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De nouveau par le théorème des deux gendarmes on conclut que

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Q2 : FAUX.

Prendre par exemple $f(x) = |x|$ qui n'est pas dérivable en 0 (cf. contre-exemple du § 5.3 du cours). Les dérivées unilatérales en 0 existent mais elles ne sont pas égales.

Q3 : FAUX.

Prendre par exemple la fonction f de l'Ex. 7, $f(x) = \begin{cases} x \sin(x) \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Alors f est dérivable sur $] -1, 1[$ (en fait sur \mathbb{R}) mais sa dérivée n'est pas continue en 0 (cf. Ex. 7).

Q4 : FAUX.

En prenant $f(x) = x$, on a $g(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ qui n'est pas dérivable en 0 (cf. cours).

Q5 : FAUX.

En posant $f = e^x$, on sait que $f^{-1} = \ln(x)$.

Or

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x} \neq \frac{1}{e^x}$$

En général, on connaît la vraie expression de la dérivée d'une fonction réciproque

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Q6 : FAUX.

La formule pour la dérivée de la fonction réciproque est $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Ici on a $f'(x) = 1 + e^x$ et $f^{-1}(1) = 0$ puisque $f(0) = 1$. Ainsi

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2}.$$

Q7 : FAUX.

En posant $f(x) = -|x + 3|$, f est dérivable en $x = 0$, puisque $f(x) = -x - 3$ pour $x \geq -3$.

Or

$$f \circ f(x) = -| -|x + 3| + 3| = \begin{cases} -| -x - 3 + 3| = -|x|, & x \geq -3 \\ -|x + 3 + 3| = -|x + 6|, & x < -3 \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas dérivable en $x = 0$.

Q8 : VRAI.

Puisque f est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $f'(a) = 0$, on a

$$(f \circ f \circ f \circ f \circ f)'(a) = f'(f(f(f(f(a))))f'(f(f(f(a))))f'(f(f(a)))f'(f(a))f'(a) = 0.$$