

# Analyse I

## Résumé: Calcul intégral.

### Définitions et résultats.

1. L'intégrale d'une fonction continue  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sur un intervalle fermé borné  $[a, b]^1$  est l'infimum des sommes de Darboux supérieures, ou également le suprémum des sommes de Darboux inférieures par rapport à toutes les subdivisions de l'intervalle  $[a, b]$ :

$$\int_a^b f(x) dx := \overline{S}(f) = \underline{S}(f)$$

2. Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, alors on pose

$$\int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx; \quad \int_a^a f(x) dx := 0.$$

3. Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $c \in ]a, b[$ . Alors on a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

4. Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $m = \min_{[a,b]} f(x)$ ,  $M = \max_{[a,b]} f(x)$ . Alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

5. (Théorème de la moyenne).

Soit  $a < b$ , et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors il existe un point  $c \in [a, b]$  tel que

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$

6. Une primitive  $F(x)$  d'une fonction continue  $f(x)$  sur un intervalle fermé borné  $[a, b]$  est une fonction continue sur  $[a, b]$  telle que  $F'(x) = f(x)$  pour tout  $x \in ]a, b[$ . Si  $F_1(x)$  et  $F_2(x)$  sont deux primitives de  $f(x)$  sur  $[a, b]$ , alors  $F_1(x) = F_2(x) + C$  pour tout  $x \in [a, b]$ , où  $C \in \mathbb{R}$ .

7. Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est une primitive de  $f(x)$  sur  $[a, b]$ .

---

<sup>1</sup>Dans ce résumé on suppose toujours que l'intervalle  $[a, b]$  contient plus qu'un point:  $a < b$ .

8. (Théorème fondamental du calcul intégral).

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Si  $G(x)$  est une primitive de  $f(x)$  sur  $[a, b]$ , alors

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a).$$

9. (Intégrale fonction de ses bornes).

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue,  $g, h : I \rightarrow [a, b]$  des fonctions dérivables sur un intervalle ouvert  $I$ . Alors

$$\frac{d}{dx} \left( \int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt \right) = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x).$$

10. (Propriétés d'intégrale). Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues.

(a)  $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$  pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

(b) Si  $f(x) \geq 0$  sur  $[a, b]$ , et  $c \in ]a, b[$ , alors  $0 \leq \int_a^c f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$ .

(c) Si  $f(x) \leq g(x)$  sur  $[a, b]$ , alors  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

## Technique d'intégration.

1. (Changement de variable).

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, et  $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continûment dérivable et telle que  $\phi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$ . Alors

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t) dt, \quad x = \phi(t).$$

2. (Intégration par parties).

Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continûment dérivables sur un intervalle ouvert  $I$ , et  $[a, b] \subset I$ . Alors

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x) dx.$$

### 3. Primitives de quelques fonctions.

$f(x)$	$F(x)$
$x^r, r \in \mathbb{R}, r \neq -1$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x  + C$
$e^x$	$e^x + C$
$a^x, a > 0, a \neq 1$	$\frac{1}{\ln a}a^x + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x) + C$
$\sinh(x)$	$\cosh(x) + C$
$\cosh(x)$	$\sinh(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$

4. Intégration de quelques fonction rationnelles (Essayez de comprendre la méthode plutôt que mémoriser). Soient  $a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R}$ .

$$(a) \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C, \text{ si } a \neq 0.$$

$$(b) \int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \frac{1}{ax+b} + C, \text{ si } a \neq 0.$$

$$(c) \int \frac{cx-d}{(x-a)(x-b)} dx = \frac{ac-d}{a-b} \ln|x-a| + \frac{d-bc}{a-b} \ln|x-b| + C, \text{ si } a \neq b, c \neq 0.$$

$$(d) \int \frac{1}{x^2+px+q} dx = \frac{1}{\sqrt{q-p^2/4}} \arctan\left(\frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}}\right) + C, \text{ si } p^2-4q < 0.$$

$$(e) \int \frac{x}{x^2+c^2} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+c^2| + C.$$

### Intégrales généralisées.

1. Soit  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On définit l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b^-} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt,$$

si la limite existe.

2. Soit  $f : ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On définit l'intégrale généralisée

$$\int_{a^+}^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt,$$

si la limite existe.

3. (Critère de comparaison).

Si  $f, g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  sont deux fonctions continues telles que il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  pour tout  $x \in [c, b[$ . Alors

– si  $\int_a^{b^-} g(t) dt$  converge, alors  $\int_a^{b^-} f(t) dt$  converge;

– si  $\int_a^{b^-} f(t) dt$  diverge, alors  $\int_a^{b^-} g(t) dt$  diverge.

4.

$$\int_a^{b^-} \frac{1}{(b-t)^\alpha} dt = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(b-a)^{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ \text{diverge}, & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

5.

$$\int_{0^+}^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ \text{diverge}, & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

6. Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Supposons qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que

$\lim_{x \rightarrow b^-} (b-x)^\alpha f(x) = l \neq 0$ . Alors l'intégrale généralisée  $\int_a^{b^-} f(t) dt$  converge si  $\alpha < 1$  et diverge si  $\alpha \geq 1$ .

7. Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors on définit l'intégrale généralisée

$$\int_{a^+}^{b^-} f(t) dt := \int_{a^+}^c f(t) dt + \int_c^{b^-} f(t) dt,$$

si les deux intégrales généralisées convergent. La définition ne dépend pas du choix de  $c \in ]a, b[$ .

8. Soit  $f : ]a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors on définit l'intégrale généralisée

$$\int_a^\infty f(t) dt := \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t) dt,$$

si la limite existe.

9. Soit  $f : ]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors on définit l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^b f(t) dt := \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b f(t) dt,$$

si la limite existe.

10. Soit  $f : ]a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors on définit l'intégrale généralisée

$$\int_{a^+}^{\infty} f(t) dt := \int_{a^+}^c f(t) dt + \int_c^{\infty} f(t) dt,$$

si les deux intégrales généralisées convergent. La définition ne dépend pas du choix de  $c \in ]a, \infty[$ .

11. Soit  $f : ]-\infty, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors on définit l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{b^-} f(t) dt := \int_{-\infty}^c f(t) dt + \int_c^{b^-} f(t) dt,$$

si les deux intégrales généralisées convergent. La définition ne dépend pas du choix de  $c \in ]-\infty, b[$ .

12. Soit  $f : ]-\infty, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors on définit l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt := \int_{-\infty}^c f(t) dt + \int_c^{\infty} f(t) dt,$$

si les deux intégrales généralisées convergent. La définition ne dépend pas du choix de  $c \in ]-\infty, \infty[$ .

13. (Critère de comparaison sur un intervalle non-borné).

Si  $f, g : ]a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  sont deux fonctions continues telles que il existe  $c \in ]a, \infty[$  et  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  pour tout  $x \geq c$ . Alors

– si  $\int_a^{\infty} g(t) dt$  converge, alors  $\int_a^{\infty} f(t) dt$  converge;

– si  $\int_a^{\infty} f(t) dt$  diverge, alors  $\int_a^{\infty} g(t) dt$  diverge.

14.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^\beta} dt = \begin{cases} \frac{1}{\beta - 1}, & \beta > 1 \\ \text{diverge}, & \beta \leq 1 \end{cases}$$

15. Soit  $f : ]a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Supposons qu'il existe  $\beta \in \mathbb{R}$  tel que

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\beta f(x) = l \neq 0$ . Alors l'intégrale généralisée  $\int_a^{\infty} f(t) dt$  converge si  $\beta > 1$  et diverge si  $\beta \leq 1$ .

16. (Critère de convergence pour les séries numériques).

Soit  $f : [1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, et supposons qu'il existe  $a \geq 1$  tel que  $f(x)$  est positive et strictement décroissante pour tout  $x \geq a$ . Alors l'intégrale généralisée

$\int_1^{\infty} f(t) dt$  et la série numérique  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  convergent ou divergent en même temps.

En particulière, la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  converge si et seulement si  $p > 1$ .