EPFL
Sections IN, SC

Anna Lachowska
décembre 2025

Analyse I
Résumé: Calcul différentiel.

Définitions et résultats de base.

1. (Dérivée d'une fonction). Une fonction $f : E \to F$ est dite dérivable en $x_0 \in E$ s'il existe la limite
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} := f'(x_0)$$
Cette limite est appelée la dérivée de $f(x)$ en $x = x_0$.

2. (Fonction différentiable) Une fonction $f : E \to F$ est dite différentiable en $x_0 \in E$ si $f(x)$ admet une présentation
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x),$$
telle que $\lim_{x\to x_0} \dfrac{r(x)}{x-x_0} = 0$.

3. Une fonction est dérivable en $x = x_0$ si et seulement si elle est différentiable en $x = x_0$.

4. Une fonction dérivable en $x = x_0$ est continue en $x = x_0$. La réciproque est fausse en général.

5. La fonction $f(x)$ admet une dérivée à gauche (resp. à droite) en $x = x_0$ s'il existe la limite $\lim_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} := f'_g(x_0)$ (resp. $\lim_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} := f'_d(x_0)$).

6. Une fonction est dérivable en $x = x_0$ si et seulement si les dérivée à gauche et à droite existent et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

7. Opérations algébriques sur les dérivées.
Soient $f, g : E \to F$ deux fonctions dérivables en $x_0 \in E$. Alors
$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$
$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}, \qquad g(x) \neq 0, x \in E$$

8. Dérivée de la fonction composée.
Si $f : E \to F$ est dérivable en x_0, $f(E) \subset G$, et $g : G \to H$ est dérivable en $f(x_0)$, alors
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

9. Dérivée de la fonction réciproque.
Soit $f : I \to F$ une fonction bijective et continue sur un intervalle ouvert I, dérivable en $x_0 \in I$, et telle que $f'(x_0) \neq 0$. Alors la fonction réciproque $f^{-1} : F \to I$ est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et on a
$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

10. Une fonction $f : E \to F$ est n fois dérivable si elle admet une dérivée d'ordre n, $f^{(n)}(x) := (f^{(n-1)}(x))'$.

11. Une fonction $f : E \to F$ est de classe $C^n(E, F)$ si elle a une dérivée d'ordre n qui est continue sur E.

Propriétés des fonctions dérivables.

12. Théorème (Rolle).
Soient $a < b$ deux nombres réels, et $f : [a, b] \to F$ une fonction telle que
    (a) $f : [a, b] \to F$ est continue sur $[a, b]$
    (b) f est dérivable sur $]a, b[$
    (c) $f(a) = f(b)$

    Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

13. Théorème des accroissements finis.
Soient $a < b$ deux nombres réels, et $f : [a, b] \to F$ une fonction telle que
    (a) $f : [a, b] \to F$ est continue sur $[a, b]$
    (b) f est dérivable sur $]a, b[$

    Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

14. Généralisation du théorème des accroissements finis.
Soient $a < b$ deux nombres réels, et $f, g : [a, b] \to F$ deux fonctions telles que
    (a) $f, g : [a, b] \to F$ sont continues sur $[a, b]$
    (b) f, g sont dérivables sur $]a, b[$ et $g'(x) \neq 0$ sur $]a, b[$

    Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

15. Règle de Bernoulli-L'Hospital.
Soient $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ deux fonctions telle que
    (a) f, g sont dérivables sur $I \setminus \{x_0\}$ et $g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$ sur $I \setminus \{x_0\}$;
    (b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \rho$, où $\rho = 0, +\infty, -\infty$;
    (c) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \mu \in \overline{\mathbb{R}}$.

    Alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \mu$.

16. La règle de Bernoulli-L'Hospital marche aussi pour les limites lorsque $x \to \pm\infty$ et $x \to a^{\pm}$.

Développements limités et formule de Taylor

17. (Développement limité).
Soit $f : E \to F$ une fonction définie au voisinage de $x = a$. S'il existent les nombres $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in E$, $x \neq a$, on a
$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x),$$
où $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$, alors on dit que f admet un développement limité (DL) d'ordre n autour de $x = a$.

18. Si f admet un développement limité d'ordre n autour de $x = a$, celui-ci est unique.

19. Soit $f : I \to F$ une fonction $(n+1)$ fois continûment dérivable sur l'intervalle ouvert I, et soit $a \in I$. Alors la formule de Taylor
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$
où u est un nombre entre a et x, nous fournit le développement limité de f d'ordre n autour de $x = a$. On peut aussi écrire $u = a + \theta(x-a)$, où $0 < \theta < 1$.

20. Opérations algébriques sur les développements limités.
– Le DL d'ordre n autour de $x = a$ d'une combinaison linéaire des deux fonctions est la même combinaison linéaire des deux DL d'ordre n autrour de $x = a$.
– Le DL d'ordre n autour de $x = a$ du produit des deux fonctions est le produit des deux DL autour de $x = a$, où on ne conserve que les termes d'ordre n.
– Le DL d'ordre n autour de $x = a$ du quotient des deux fonctions est le résultat de division polynômiale des deux DL autour de $x = a$, où on ne conserve que les termes d'ordre n.

21. DL d'une fonction composée.
Soit
$$f(x) = a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon_1(x),$$
et
$$g(y) = g(0) + b_1 y + b_2 y^2 + \ldots + b_n y^n + y^n \varepsilon_2(y),$$
les DL de f autour de $x = a$ et de g autour de $y = 0$. En particulier, on a $f(a) = 0$. Alors $g \circ f$ admet un DL d'ordre n autour de $x = a$ avec la partie principale
$$g(0) + b_1(P_f^n(x-a)) + b_2(P_f^n(x-a))^2 + \ldots,$$
où $P_f^n(x-a) = a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n$ est la partie principale du DL de f autour de $x = a$, où on ne conserve que les termes d'ordre n.

Étude de fonctions.

22. Si $f : E \to F$ dérivable en x_0, et $f(x)$ admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

23. Soit $a < b$, et $f : [a,b] \to F$ est une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a,b[$. Alors $f(x)$ est constante sur $[a,b]$.

24. Soit $f : [a, b] \to F$ est une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, où $a < b$. Alors:
(a) $f(x)$ est croissante (décroissante) sur $[a, b]$ si est seulement si $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) pour tout $x \in]a, b[$.
(b) Si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) pour tout $x \in]a, b[$, alors $f(x)$ est strictement croissante (resp. décroissante) sur $]a, b[$.

25. (Condition suffisante pour qu'une fonction ait un extremum local).
Soit $f \in C^n(I, F)$, où I est un intervalle ouvert, $c \in I$, et $n \in \mathbb{N}^*$ est un nombre pair tel que
$$f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0,$$
mais $f^{(n)}(c) \neq 0$. Alors
– f admet un minimum local au point $x = c$ si $f^{(n)}(c) > 0$;
– f admet un maximum local au point $x = c$ si $f^{(n)}(c) < 0$.

26. (Condition suffisante pour qu'une fonction ait un point d'inflextion).
Soit $f \in C^n(I, F)$, où I est un intervalle ouvert, $c \in I$, et $n \in \mathbb{N}, n > 1$ est un nombre impair tel que
$$f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0,$$
mais $f^{(n)}(a) \neq 0$. Alors le point $(a, f(a))$ est un point d'inflexion de f.

27. (Convexité).
Soit $f \in C^2(I, F)$, où I est un intervalle ouvert. Alors f est convexe sur I si est seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

Calcul des dérivées.

1. Quelques fonctions et leurs dérivées.

$f(x)$	$f'(x)$
x^r	$rx^{r-1},\ \ r \in \mathbb{R},\ r \neq 0$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln(a),\ \ a > 0,\ a \neq 1$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\dfrac{1}{x \ln(a)},\ \ a > 0,\ a \neq 1$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tanh(x)$	$\dfrac{1}{\cosh^2(x)}$

2. (Dérivée logarithmique).
Si les fonctions $f(x)$ et $\ln(f(x))$ sont dérivables, $f(x) > 0$, alors on a

$$f'(x) = f(x)(\ln(f(x)))'.$$

En particulier, on a

$$(x^x)' = x^x(\ln(x) + 1), \qquad x > 0.$$

Si les fonctions $f(x), g(x)$ sont dérivables et $f(x) > 0$, alors on a

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = f(x)^{g(x)} \left(g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right), \qquad f(x) > 0.$$