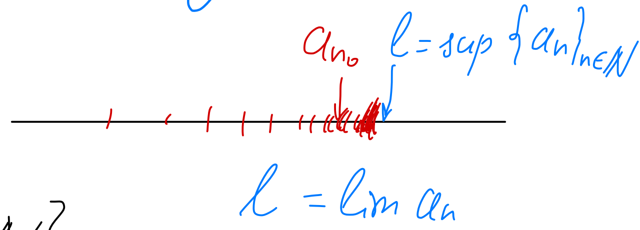
Théorème : Convergence des suites monotones.

Toute suite croissante qui est majorée converge vers son supremum.
décroissante minorée infimum

Toute suite croissante qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$ (diverge)
décroissante qui n'est pas minorée tend vers $-\infty$ (diverge)

Notation : $(a_n)\uparrow \iff (a_n)$ est croissante
$(b_n)\downarrow \iff (b_n)$ est décroissante



Dém : Soit $(a_n)\uparrow$ et majorée. Alors $\exists\, \ell = \sup\{a_n, n\in\mathbb{N}\}$

$\underbrace{\forall \varepsilon>0 \ \exists\, n_0\in\mathbb{N} : 0\le \ell - a_{n_0}\le\varepsilon}_{\text{déf de sup}}$. Puisque $(a_n)\uparrow \Rightarrow \forall n\ge n_0 \Rightarrow a_n \ge a_{n_0}$
$\ell - a_n \le \ell - a_{n_0}$

$\Rightarrow \forall n\ge n_0 \quad 0\le \ell - a_n \le \varepsilon \Rightarrow |\ell - a_n|\le\varepsilon \ \underset{\text{de lim}}{\overset{\text{def}}{\Longrightarrow}} \ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$

Soit $(a_n)\uparrow$ pas majorée $\Rightarrow \forall A>0 \ \exists\, a_{n_0}\ge A$. $(a_n)\uparrow \Rightarrow \forall n\ge n_0 \Rightarrow$
$a_n \ge a_{n_0} \ge A \ \underset{\text{de lim} = \infty}{\overset{\text{def}}{\Longrightarrow}} \ \lim a_n = +\infty$, (a_n) diverge

Le cas de $(a_n)\downarrow$ est similaire. $\blacksquare$

Le nombre e.

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Proposition Soit (x_n) : $x_0 = 1$, $\boxed{x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ $\forall n \geq 1$; (y_n) : $y_0 = 1$, $y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ $\forall n \geq 1$

Alors
(1) $x_n \leq y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
(2) $y_n \leq 3$ $\forall n \in \mathbb{N}$
(3) $(y_n) \uparrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$
(4) $(x_n) \uparrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(2), (3) $\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} y_n = \ell \leq 3$; (1)–(4) $\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = \ell' \leq 3$. en fait, $\ell = \ell' = e$

Dém: (1) $x_0 \leq y_0$; $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k + \dots + \binom{n}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$

$$\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{k!}\,\frac{n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1)}{n^k} = \frac{1}{k!}\,\underbrace{\frac{n}{n}}_{\leq 1}\cdot\underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\leq 1}\cdot\underbrace{\frac{n-2}{n}}_{\leq 1}\cdots\underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{\leq 1} \leq \frac{1}{k!}$$

$$\Rightarrow x_n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \dots + \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k + \dots \binom{n}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} = y_n \quad \forall n \geq 1.$$

(2) $y_n \leq 3$. par recurrence: $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ $\forall k \geq 1$ initialisation: $k = 1 \Rightarrow \frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^{1-1}} = 1$ Vrai

hérédité: Supposons que $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$, considérons $\frac{1}{(k+1)!} = \underbrace{\frac{1}{k!}}_{\leq \frac{1}{2^{k-1}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{\leq \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k} \Rightarrow$ par récurrence

rappel: $(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) = \frac{1-x^n}{1-x}$ $\forall x \neq 1$. Soit $x = \frac{1}{2}$ on a: $y_n \leq 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$

$$\Rightarrow y_n \leq \underbrace{1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3 \qquad \forall n \geq 1.$$

(3) $y_{n+1} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} = y_n + \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow (y_n) \uparrow$

(4) $(x_n)\uparrow$ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ Moyenne géométrique ≤ moyenne arithmétique $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

$\sqrt[n+1]{a_0 a_1 \dots a_n} \leq \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n+1}$; Soient $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)$ Alors

$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \leq \frac{1 + n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} \Rightarrow \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \leq \frac{1+n+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ ▨

☺

Déf $\boxed{\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{déf}}{=} e}$

$e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Remarque: $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = e$ [DZ §3.4.3, 3.4.4]

$e = 2.718281828459045235360287\dots$

Calcul des limites.

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ pour tout $p > 0$.

2. Soient $x_n = a_p n^p + \ldots + a_0$ et $y_n = b_q n^q + \ldots + b_0$ deux suite polynômiales telles que $a_p > 0, b_q > 0$. Alors:
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = 0, \quad \text{si} \quad p < q$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a_p}{b_q}, \quad \text{si} \quad p = q$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \infty, \quad \text{si} \quad p > q$$

Cours 7

Cours 8

3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pour tout $a > 0$.

4. La suite géométrique $(a_0 r^n)$, $a_0, r \in \mathbb{R}$, converge vers la limite $\lim_{n\to\infty} a_0 r^n = 0$, si $|r| < 1$, et diverge si $|r| > 1$.

5. $\lim_{n\to\infty} \frac{p^n}{n!} = 0$ pour tout $p > 0$.

6. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. $\longleftarrow$ cours 9

7. $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$.

8. $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

9. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$.

10. $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

Série 5

Suites définies par récurrence.

Soit $x_0 = a \in \mathbb{R}$, et $x_{n+1} = g(x_n)$ où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

Questions: convergence ; si la suite converge, trouver la limite.

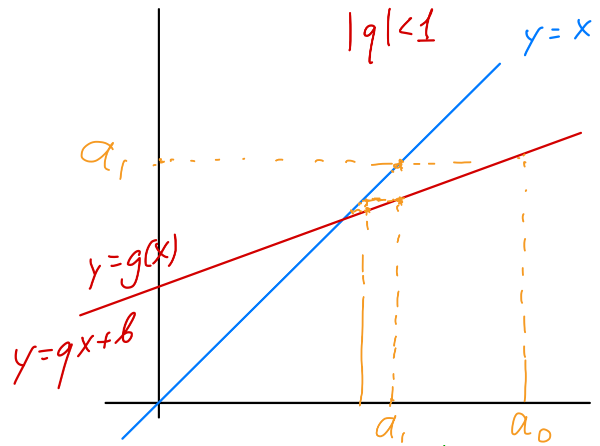
$$a_{n+1} = q a_n + b$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$\ell = q\ell + b$$

Proposition (Récurrence linéaire).

Soit $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_{n+1} = q a_n + b$, où $q, b \in \mathbb{R}$.

Alors (1) si $|q| < 1 \Rightarrow (a_n)$ converge vers $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{b}{1-q}$

(2) si $|q| \geq 1 \Rightarrow (a_n)$ diverge sauf si (a_n) est une suite constante.



Dém: (1) Supposons (a_n) converge $\Rightarrow$ l'équation pour la limite $\ell = q\ell + b \Rightarrow \ell = \frac{b}{1-q}$, $q \neq 1$

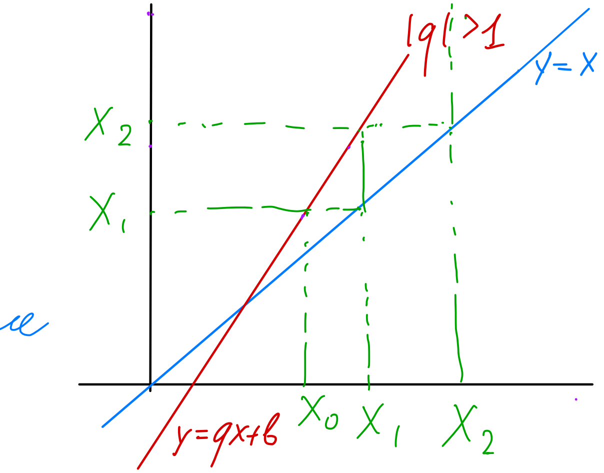
Convergence: Soit $|q| < 1$. Alors $\forall n \geq 1$ on a:

$$0 \leq |a_{n+1} - \ell| = |q a_n \cancel{+b} - (q\ell \cancel{+b})| = |q||a_n - \ell| = |q|^2 |a_{n-1} - \ell| =$$

$$= |q|^{n+1} |a_0 - \ell| \Rightarrow 0 \leq |a_{n+1} - \ell| = |q^{n+1}| |a_0 - \ell|$$

$$0 \qquad \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \text{suite géométrique } |q| < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_{n+1} - \ell| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - \ell) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \ell = \frac{b}{1-q}$$



$\boxed{a_{n+1} = q a_n + b}$

$|q| \neq 1$

Si $a_0 = \frac{b}{1-q} \Rightarrow a_n = \frac{b}{1-q} \ \forall n \in \mathbb{N}$; $a_1 = q\frac{b}{1-q} + b = \frac{qb + b(1-q)}{1-q} = \frac{b}{1-q}$

(2) Si $|q| > 1$; $a_0 \neq \frac{b}{1-q} \Rightarrow$ la suite diverge,

$|a_{n+1} - \ell| = |q|^{n+1} |a_0 - \ell|$, $|q| > 1$ suite géométrique avec $r = |q| > 1$

$\Rightarrow$ n'est pas bornée $\Rightarrow$ divergente

$|a_{n+1} - \ell|$ est divergente $\Rightarrow (a_{n+1} - \ell)$ est divergente $\Rightarrow (a_n)$ est divergente.

(3) $q = 1 \Rightarrow a_{n+1} = a_n + b$ suite arithmétique ; si $b \neq 0 \Rightarrow$ divergente

si $b = 0 \Rightarrow a_n = a_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$

(4) $q = -1 \Rightarrow a_{n+1} = -a_n + b \Rightarrow a_1 = -a_0 + b$, $a_2 = -a_1 + b = -(-a_0 + b) + b = a_0$

$a_3 = -a_2 + b = -a_0 + b = a_1 \Rightarrow a_{2k} = a_0$; $a_{2k+1} = -a_0 + b$

Convergente $\Leftrightarrow a_0 = -a_0 + b \Leftrightarrow a_0 = \frac{b}{2} \Rightarrow$ constante $\Rightarrow$ convergente

Sinon, (a_n) est divergente.

$\square$

Proposition Si $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = g(x_n)$ et $g: E \to E \subset \mathbb{R}$ telle que

(1) $\exists m, M \in \mathbb{R}: \; m \le g(x) \le M \quad \forall x \in E$

(2) g est croissante : $\forall x_1, x_2 \in E : x_1 \le x_2 \Rightarrow g(x_1) \le g(x_2)$

Alors la suite (x_n) $x_{n+1} = g(x_n)$ est bornée et monotone $\Rightarrow$ convergente (Série 6)

Remarque. Si (2) est remplacé par $x_1 \le x_2 \Rightarrow g(x_1) \ge g(x_2)$ (g est décroissante)

$\Rightarrow$ alors (x_n) n'est pas monotone ! (mais (x_n) peut être convergente).

Ex non-linéaire $x_{n+1} = 5 - \frac{6}{x_n}$, $x_0 = 4$

L'équation pour la limite : $\ell = 5 - \frac{6}{\ell} \Rightarrow \ell^2 = 5\ell - 6 \Rightarrow \ell^2 - 5\ell + 6 = (\ell-2)(\ell-3) = 0$

deux candidat : $\ell = 2$, $\ell = 3$

$g(x) = 5 - \frac{6}{x}$ croissante, $x > 0 \Rightarrow (x_n)$ est monotone

$x_0 = 4$, $x_1 = 5 - \frac{6}{4} = \frac{7}{2} < x_0$, $x_2 = 5 - \frac{6 \cdot 2}{7} = \frac{35-12}{7} = \frac{23}{7} < \frac{7}{2} \Rightarrow (x_n) \downarrow$

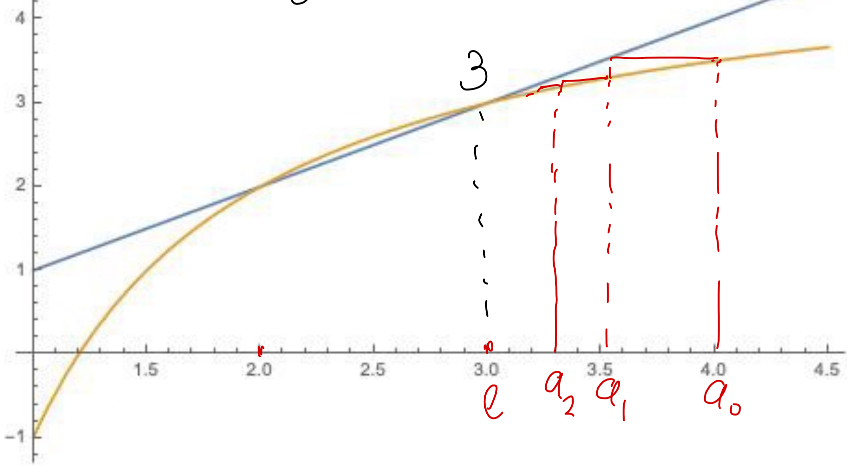
Minoration : Soit $x > 3 \Rightarrow g(x) = 5 - \underbrace{\frac{6}{\underbrace{x}_{>3}}}_{<2} > 5 - 2 = 3$ Puisque $x_0 = 4 > 3$, $x_1 > 3$, $x_2 > 3$, ...

$x_n > 3 \Rightarrow g(x_n) = x_{n+1} > 3 \Rightarrow x_n > 3 \;\forall n$

$\Rightarrow (x_n)$ est minorée par 3 et décroissante

$\Rightarrow (x_n)$ est convergente.

Puisque $(x_n) > 3 \;\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 3$.



Quelques méthodes pour étudier les suites définies par récurrence.

(1) Trouver les candidats pour la limite en supposant qu'elle existe.
Si l'équation n'admet pas de solution $\Rightarrow$ la suite diverge.

(2) Étudier la convergence : (Faire un graphique si possible)

(a) Récurrence linéaire : $x_{n+1} = q x_n + b \Rightarrow$

Si $|q| < 1$ $\quad \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{b}{1-q}$

Si $|q| > 1$ $\quad (x_n)$ diverge sauf si $x_0 = \frac{b}{1-q}$ (suite constante)

Si $|q| = 1$ $\quad (x_n)$ diverge sauf si (x_n) est constante.

(b) Si $x_{n+1} = g(x_n)$ avec $g(x)$ croissante $\Rightarrow$ la suite est monotone.

Si $x_0 < x_1 \Rightarrow (x_n)\uparrow \Rightarrow$ essayer de démontrer que (x_n) est majorée
Si $x_0 > x_1 \Rightarrow (x_n)\downarrow$ — " — (x_n) est minorée
$\Big\}\Rightarrow$ convergente.

(c) Proposition. Si (x_n) et (a_n) deux suites: $0 < a_n < 1$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$
et $\exists\, \ell \in \mathbb{R}$: $(x_{n+1} - \ell) = a_n (x_n - \ell)$. Alors (x_n) converge (Serie 5).

Question 9

La suite (a_n) : $a_0 = -1$, $a_{n+1} = \frac{5a_n}{2a_n+1}$

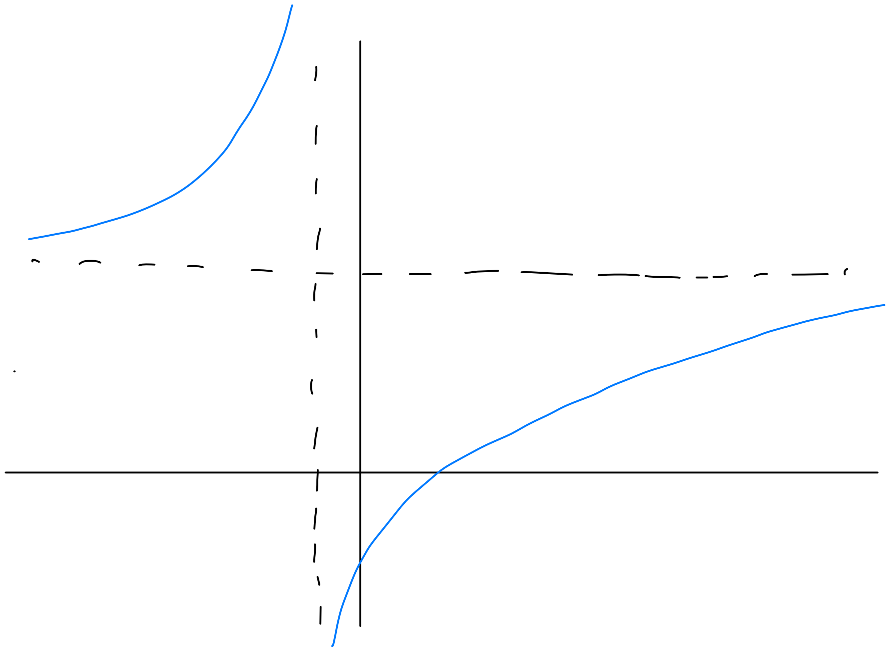
A : n'est pas bornée, $\lim a_n \neq \pm\infty$

B : converge vers 2

C : est bornée, mais diverge

D : converge vers 0

E : diverge, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$



$\ell = \frac{5\ell}{2\ell+1} \Rightarrow 2\ell^2 + \ell - 5\ell = 0$

$2\ell^2 - 4\ell = 0$

$\ell(\ell-2) = 0$, $\ell = 0$, $\ell = 2$.

$g(x) = \frac{5x}{2x+1} = \frac{5}{2}\,\frac{x+\frac12-\frac12}{x+\frac12} = \frac52 - \frac54\,\frac{1}{x+\frac12}$

$g(x)\uparrow \Rightarrow (a_n)$ monotone sur $]-\infty,-\frac12[$ et $]-\frac12,\infty[$

$a_0 = -1$, $a_1 = 5$, $a_2 = \frac{25}{11} < a_1$

$a_n \downarrow \quad n \geq 1$

$a_n \geq 2$: $a_{n+1} = \frac52\Bigg(\underbrace{1 - \underbrace{\frac{\frac12}{\underbrace{a_n+\frac12}_{\geq \frac52}}}_{\leq \frac15}}_{\geq \frac45}\Bigg) \geq 2$

suite $a_n \downarrow$ monotone,

$a_n \geq 2 \ \forall n \geq 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$