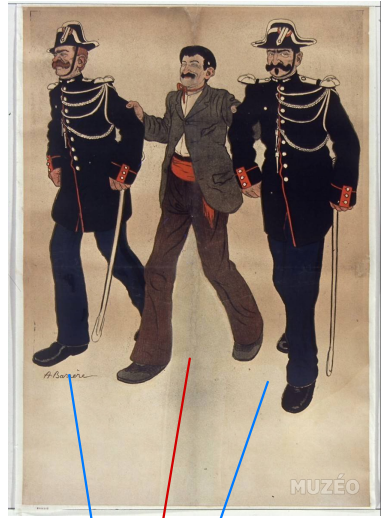


Rappel: Théorème des deux gendarmes.

Soient $(a_n), (b_n), (c_n)$ trois suites, telles que

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l$
 - (2) $\exists k \in \mathbb{N} : \forall n \geq k, a_n \leq b_n \leq c_n$
- } \Rightarrow Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$



Ex 1. Soit $a_0 = 1, a_n = \sqrt[n]{a}, a > 0 \forall n \geq 1$

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

Dém: (1) Soit $a = 1 \Rightarrow a_n = \sqrt[n]{1} = 1 \forall n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

(2) Soit $a > 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) = x^n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow x - 1 = \frac{x^n - 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1}$ Soit $x = \sqrt[n]{a} > 1 \quad (a > 1 \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} > 1)$

$\Rightarrow 0 < \sqrt[n]{a} - 1 = \frac{a - 1}{\underbrace{a^{\frac{n-1}{n}} + a^{\frac{n-2}{n}} + \dots + a^{\frac{1}{n}} + 1}_{> n}} < \frac{a-1}{n} \Rightarrow 0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n}$

\downarrow \downarrow \downarrow
 0 0 $0 \quad n \rightarrow \infty$

\Rightarrow Par les 2 gendarmes $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{a} - 1) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$

(3) Soit $0 < a < 1$ Soit $b = \frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{\frac{1}{a}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b}} = \frac{1}{1} = 1.$



Ex 2. Suite géométrique $a_n = a_0 r^n$, $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$, $r \in \mathbb{R}$

Alors:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 r^n &= 0 & |r| < 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 r^n &= a_0 & , \quad r = 1 \\ a_n = a_0 r^n &\text{ diverge, } & |r| > 1 \text{ ou } r = -1. \end{aligned}$$

Notation:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$0 \leq k \leq n ; 0! = 1$$

$$\text{Ex: } \binom{3}{3} = \frac{3!}{3!0!} = 1$$

$$(1+x)^3 = \binom{3}{0} + \binom{3}{1}x + \binom{3}{2}x^2 + \binom{3}{3}x^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3.$$

Dém: (1) Soit $r > 1 \Rightarrow r = 1+x$, $x > 0$.

$$r^n = (1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \underbrace{\binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n}_{>0} \geq 1 + \binom{n}{1}x = 1 + nx \quad \forall n \geq 1$$

$$\forall M > 0 \exists n \in \mathbb{N}: (1+nx) > M \quad (\text{Archimède})$$

$\Rightarrow |a_0 r^n| = |a_0 (1+x)^n| \geq |a_0| (1+nx) > |a_0| \cdot M \Rightarrow$ la suite n'est pas bornée \Rightarrow divergente.

(2) Soit $0 < r < 1$. Soit $q = \frac{1}{r} > 1 \Rightarrow \forall M > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: q^n > M \quad \forall n \geq n_0$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $M = \frac{|a_0|}{\varepsilon} \Rightarrow q^n > \frac{|a_0|}{\varepsilon} \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{q^n} = r^n < \frac{\varepsilon}{|a_0|} \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow |a_0 r^n - 0| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$ par la déf de la limite $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 r^n = 0$

(3) $r = 1 \Rightarrow a_0 r^n = a_0 \quad \forall n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 r^n = a_0$

(4) Exercice: $r < 0$. Astuce: Si $|r| > 1 \Rightarrow$ par (1) $|a_0 r^n|$ n'est pas bornée.

Si $-1 < r < 0 \Rightarrow$ Soit $q = -r \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 q^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(-1)^n}_{\text{borné}} \underbrace{a_0 q^n}_{\rightarrow 0} = 0$ (à voir plus tard)



Ex. $a_n = (-3)^{-3n} = ((-3)^{-3})^n = ((-1)^{-3} \cdot 3^{-3})^n = \left(-1 \frac{1}{27}\right)^n = \left(-\frac{1}{27}\right)^n$

$\Rightarrow r = -\frac{1}{27}$, $|r| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-3)^{-3n} = 0.$

Ex. $b_n = \sqrt{\frac{2^{2n+1}}{3^{n+8}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4^n}{3^8 \cdot 3^n}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3^8}} \left(\sqrt{\frac{4^n}{3^n}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3^4} \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^n = \frac{\sqrt{2}}{81} \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^n$

$r = \sqrt{\frac{4}{3}} > 1 \Rightarrow$ divergente.

Remarques. (1) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |l|$

Exercice: $||x_n| - |l|| \leq |x_n - l|$ voir [DZ §1.4.4]

(2) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ($\forall \epsilon > 0 \exists n_0: ||x_n| - 0| = |x_n - 0| \leq \epsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$)

(2^a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = l \neq 0 \not\Rightarrow$ convergence de (x_n) Ex: $(-1)^n$ diverge, mais $\lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n| = 1$

(3) Si (a_n) est bornée et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$

Dém: $|a_n| < M \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$
bornée $0 \leq |a_n b_n| \leq M |b_n|$
 \downarrow $\downarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = 0$
 0 0

\Rightarrow Par les 2 gendarmes $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n b_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$

Théorème Critère de D'Alembert

Soit (a_n) une suite telle que $a_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$

et $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \geq 0$

Alors Si $\rho < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Si $\rho > 1 \Rightarrow (a_n)$ diverge.

Dém: Soit $\rho < 1$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho < 1 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \rho + \varepsilon < 1$
 choix de $\varepsilon > 0$

Soit $m > n_0 \Rightarrow \underbrace{\left| \frac{a_m}{a_{m-1}} \right|}_{\leq \rho + \varepsilon} \cdot \underbrace{\left| \frac{a_{m-1}}{a_{m-2}} \right|}_{\leq \rho + \varepsilon} \cdot \dots \cdot \underbrace{\left| \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \right|}_{\leq \rho + \varepsilon} \leq (\rho + \varepsilon)^{m-n_0}$

$= \left| \frac{a_m}{a_{n_0}} \right|$

$\Rightarrow 0 \leq |a_m| \leq |a_{n_0}| (\rho + \varepsilon)^{m-n_0} \quad \forall m > n_0$
 $\downarrow \quad \downarrow m \rightarrow \infty$
 $0 \quad 0$ suite géométrique $\lim_{m \rightarrow \infty} (\rho + \varepsilon)^{m-n_0} |a_{n_0}| = 0$ puisque $0 < \rho + \varepsilon < 1$.

\Rightarrow Par les 2 gendarmes $\lim_{m \rightarrow \infty} |a_m| = 0 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} a_m = 0$

L'autre cas $\rho > 1$: Exercice (Voir DZ § 3.3.14) ▣

Remarque. Si $\rho = 1 \Rightarrow$ pas d'information sur la convergence de (a_n)

Ex. $a_n = n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1 = \rho$ et (a_n) diverge

$b_n = \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1 = \rho$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

Ex Critère de D'Alembert

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{5^n} \quad \text{D'Alembert} : \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{5^{n+1}} \frac{5^n}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} \cdot \frac{1}{5} =$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{n^3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} = \rho < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{5^n} = 0 \text{ par D'Alembert}$$

cours 7 \rightarrow 1

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{n!} \quad \text{D'Alembert: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{5^{n+1}}^5}{\cancel{(n+1)!}^{(n+1)}} \frac{n!}{\cancel{5^n}} =$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n+1} = 0 = \rho < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{n!} = 0 \text{ par D'Alembert.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{n!} = 0 \quad \forall 5 \in \mathbb{R}$$

Calcul des limites.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$ pour tout $p > 0$. ✓

2. Soient $x_n = a_p n^p + \dots + a_0$ et $y_n = b^q n^q + \dots + b_0$ deux suite polynômiales telles que $a_p > 0, b_q > 0$. Alors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = 0, \quad \text{si } p < q \quad \checkmark$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{a_p}{b_q}, \quad \text{si } p = q \quad \checkmark$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \infty, \quad \text{si } p > q$$

$p > q \Rightarrow$ diverge \rightarrow

Cours 7

Cours 8

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pour tout $a > 0$. ✓

4. La suite géométrique $(a_0 r^n)$, $a_0, r \in \mathbb{R}$, converge vers la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_0 r^n = 0$, si $|r| < 1$, et diverge si $|r| > 1$. ✓

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^n}{n!} = 0$ pour tout $p > 0$. ✓

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$.

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

Série 5

Cours 8

Limites infinies.

-75-

Déf On dit que (a_n) tend vers $+\infty$ si: $\forall A > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0, a_n \geq A$
 $(b_n) \quad -\infty \quad b_n \leq -A$

Notation: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$

Attention: les suites (a_n) et (b_n) sont divergentes.

Propriétés (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm \infty$ et (b_n) est bornée $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \pm \infty$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ et $a_n \geq b_n$ $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$
 $-\infty$ et $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq n_0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ "règle d'un seul gendarme"

(4) (a_n) bornée et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \pm \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Dém: $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \Rightarrow \forall M \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0$

$$b_n \geq M \Rightarrow \frac{1}{b_n} \leq \frac{1}{M}. \text{ Soit } M = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \exists n_0: \forall n \geq n_0 \frac{1}{b_n} \leq \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = 0$$

$$(a_n) \text{ bornée} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty$ $a_n \neq 0 \forall n \Rightarrow$ alors (a_n) diverge

(extension du critère de d'Alembert)

Formes indéterminées

(1) $\infty - \infty$

-76-

Ex. $a_n = \sqrt{n^2} - \sqrt{n+2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2} - \sqrt{n+2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2} - \sqrt{n+2})(\sqrt{n^2} + \sqrt{n+2})}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n+2}} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - (n+2)}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{\underbrace{\sqrt{n^2}}_{\rightarrow \infty} + \underbrace{\sqrt{n+2}}_{\rightarrow \infty}} = 0$$

$b_n = n^2 - n \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n(n-1) = \infty$

$\rightarrow \infty \quad \rightarrow \infty$ $\rightarrow \infty \quad \rightarrow \infty$

(2) $\frac{\infty}{\infty}$ Ex: quotient des deux polynômes (cours 7)

(3) $\frac{0}{0}$ Ex: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^3} = 0$

(4) $0 \cdot \infty$ Ex: $\frac{1}{(n+1)^2} \cdot (n+1) = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ $\frac{1}{n+1} \cdot (n+1)^2 = (n+1) \rightarrow \infty$ *diverge*

$\rightarrow 0$ $\rightarrow 0$ $\rightarrow \infty$

$-1 \leq \cosh n \leq 1$

$\frac{(1 + \cosh n)}{1+n} \cdot (n+1) = 1 + \cosh n$ *diverge*

$\rightarrow 0$ $\rightarrow \infty$

Remarque. $(\cos n)$ et $(\sin n)$ sont des suites divergentes.

Dém: Supposons $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos n) = l \in \mathbb{R}$

L'ensemble $\{\cos n, \cos(n+1), \cos(n+2), \cos(n+3), \cos(n+4)\}$ contient des valeurs positives et négatives $\forall n \in \mathbb{N}$
 $3 < \pi < 4$

\Rightarrow la limite, si elle existe, est égale à 0.

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos n) = l = 0$ le même argument marche pour $\sin n$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin n) = 0$ [Aussi $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(n+1)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos n \cos 1 - \sin n \sin 1) = 0$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n = 0$

$\Rightarrow \lim (\cos^2 n) = 0$; et $\lim (\sin^2 n) = 0$

mais $\lim (\cos^2 n + \sin^2 n) = \lim 1 = 1$ contradiction

$\Rightarrow (\sin n)$ et $(\cos n)$ sont divergentes.



Question 8

La limite de la suite

$$a_n = \left(\cos \frac{n\pi}{2} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{\pi}{4} \right)^n$$

A est $\frac{1}{\sqrt{2}}$

B n'existe pas

C est 0

D est ∞

E est $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\left(\cos \frac{\pi n}{2} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi n}{2} \sin \frac{\pi}{4} \right)^n = \cos^n(\alpha + \beta) = \left(\cos \left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)^n$$

$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

$$\cos \left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \dots \right)$$

$$\left| \cos \left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left| \cos^n \left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \Rightarrow \lim \left| \cos^n \left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| =$$

$$= \lim \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

$r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ suite géométrique

$$0 < r < 1$$

