Rappel: Limite d'une suite.

Déf Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \overset{\text{déf}}{\iff} \forall\, \varepsilon>0\ \exists\, n_0\in\mathbb{N} : \forall n\geq n_0 \Rightarrow |a_n-\ell|\leq\varepsilon.$$

Ex. Soit $p\in\mathbb{Q}, p>0$. Considérons la suite $a_0=1, a_n=\frac{1}{n^p}, n\geq 1$.

Alors $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$

Dém: Soit $\varepsilon>0$. On cherche $n_0\in\mathbb{N}: \forall n\geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{n^p}-0\right|\leq\varepsilon \iff \frac{1}{n^p}\leq\varepsilon$

$\iff \frac{1}{\varepsilon}\leq n^p \underset{p>0}{\iff} \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}\leq n$ (voir Exercice : Si $0<x\leq y \Rightarrow x^m\leq y^m$ et $x^{\frac{1}{m}}\leq y^{\frac{1}{m}}\ \forall m\in\mathbb{N}^*$)

Puisque $\mathbb{N}$ n'est pas borné $\Rightarrow \exists\, n_0\in\mathbb{N}: n_0\geq\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}} \Rightarrow \forall n\geq n_0 \Rightarrow n\geq\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}$

$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon}\leq n^p \Rightarrow \frac{1}{n^p}\leq\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n^p}-0\right|\leq\varepsilon.$

$\Rightarrow$ Par la déf de la limite $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$ ∎

Autrement, on peut poser $n_0=\left\lfloor\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}\right\rfloor+1 \Rightarrow n_0>\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}$ et montrer que dans ce cas $\forall n\geq n_0$ on a $\frac{1}{n^p}\leq\varepsilon$.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0\ \forall p>0}$$

Exercice $\forall x,y \in \mathbb{R} : 0 < x \leq y \Rightarrow x^m \leq y^m$ et $x^{\frac{1}{m}} \leq y^{\frac{1}{m}}$ $\forall m \in \mathbb{N}^*$

(1) Soient $a,b,c,d \in \mathbb{R}$: $0 < a \leq b$ et $0 < c \leq d$. Alors $bd \geq ac$

$b-a \geq 0$, $c \geq 0 \Rightarrow bc - ac \geq 0$; $d-c \geq 0$ et $b \geq 0 \Rightarrow db - bc \geq 0 \Rightarrow bd \geq bc \geq ac \Rightarrow bd \geq ac$

(2) Si $0 < x \leq y \Rightarrow x^m \leq y^m$ $\forall m \in \mathbb{N}^*$ par récurrence : $m = 1 \Rightarrow x \leq y$ Vrai.

Supposons $x^n \leq y^n$. Alors $\overset{\text{par (1)}}{:}$ $x \leq y$ et $x^n \leq y^n \Rightarrow x^{n+1} \leq y^{n+1}$ Vrai

$\Rightarrow$ par recurrence $x^m \leq y^m$ $\forall m \in \mathbb{N}^*$ (Aussi si $x \neq y \Rightarrow x^m < y^m$).

(3) Si $0 < x \leq y \Rightarrow x^{\frac{1}{m}} \leq y^{\frac{1}{m}}$ $\forall m \in \mathbb{N}^*$. Par contraposée : supposons $x^{\frac{1}{m}} > y^{\frac{1}{m}}$.

Alors par (2) $\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^m > \left(y^{\frac{1}{m}}\right)^m \Leftrightarrow x > y$, contradiction puisque $x \leq y$

$$\Rightarrow x^{\frac{1}{m}} \leq y^{\frac{1}{m}} \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

$\blacksquare$

Proposition (unicité de la limite).

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, telle que $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ sont des limites de (a_n). Alors $a = b$.

[DZ, § 3.2.4] Si elle existe, la limite d'une suite est unique.

Inégalité triangulaire. $|x+y| \le |x|+|y| \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$

Dém: $\forall x,y\in\mathbb{R}$ on a: $x\le|x|$ et $-x\le|x|$; $y\le|y|$ et $-y\le|y|$

$$\text{Alors}\quad \left.\begin{array}{l} \text{si } x+y\ge 0 \Rightarrow |x+y| = x+y \le |x|+|y| \\ \text{si } x+y<0 \Rightarrow |x+y| = -x-y \le |x|+|y| \end{array}\right\} \Rightarrow |x+y|\le|x|+|y|$$

$\blacksquare$

Ex. $a_n=(-1)^n$, $n\in\mathbb{N}$. Alors a_n est divergente.

Par absurde: Supposons qu'il existe la limite $\ell\in\mathbb{R}$ de $(-1)^n$.

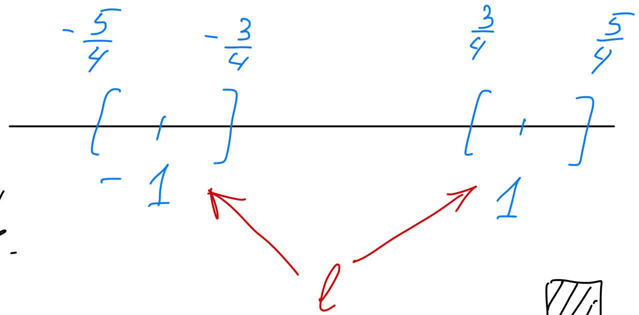
Soit $\varepsilon=\frac{1}{4} \Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N} : \forall n\ge n_0 \Rightarrow |a_n-\ell|\le\frac{1}{4}$

$a_{2k}=1$, $a_{2k+1}=-1$ $\forall k\in\mathbb{N} \Rightarrow \forall k : 2k\ge n_0$ et $2k+1\ge n_0$ on a:

$$|a_{2k}-\ell| = \underbrace{|1-\ell|}_{=|\ell-1|} \le \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad |a_{2k+1}-\ell| = |-1-\ell| \le \frac{1}{4}$$

$$2 = |\ell-1+(-1-\ell)| \overset{\Delta}{\le} |\ell-1|+|-1-\ell| \le \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow 2\le\frac{1}{2}$ absurde $\Rightarrow (a_n)=(-1)^n$ est divergente.

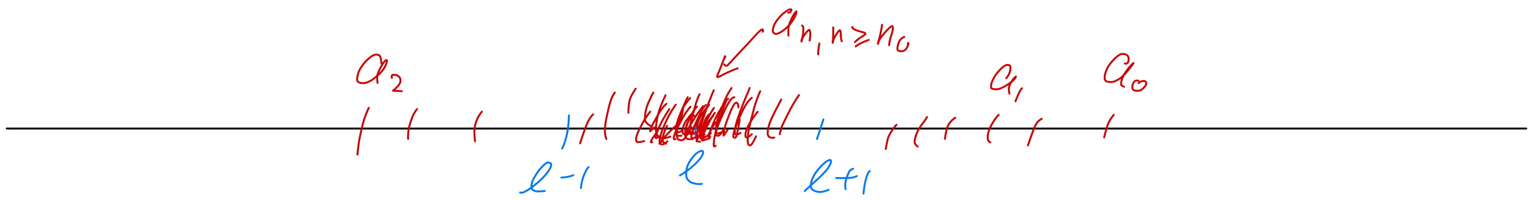


$\blacksquare$

Proposition Toute suite convergente est bornée.

Dém: Soit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ et soit $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$

on a $|a_n - \ell| \leq 1 \quad \forall n \geq n_0$



Soit $S = \{a_0, a_1 \dots a_{n_0-1}\}$ ensemble fini de nombres réels

$\Rightarrow \exists \max S$ et $\min S$

$\Rightarrow$ la suite (a_n) est majoré par $\max(\max S, \ell+1)$

minoré par $\min(\min S, \ell-1)$ $\square$

La réciproque de la Proposition est fausse, $(-1)^n = a_n$ est bornée

par -1 et 1

mais divergente.

Opérations algébriques sur les limites

Proposition Soient (a_n) et (b_n) deux suites convergentes. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$

Alors :

(1) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$

(2) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

(3) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$ si $\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$

voir [DZ §3.3.3]

Remarques (1) Si $(a_n + b_n)$ convergente $\not\Rightarrow$ Soit (a_n) et (b_n) convergent, soit (a_n) et (b_n) divergent. Ex : $a_n = n$, $b_n = -n$ $\Rightarrow a_n + b_n = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$

Si (b_n) converge et $(a_n + b_n)$ converge $\Rightarrow$ alors (a_n) converge

$$a_n = \underbrace{(a_n + b_n)}_{\text{conv}} - \underbrace{b_n}_{\text{conv}}$$ converge par Prop (1)

(2) Cas particulier : Si $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0 \not\Rightarrow$ Soit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$, soit les deux suites (a_n) et (b_n) divergent.

Ex : $a_n = n + \frac{1}{n+1}$, $b_n = n$ $\Rightarrow a_n - b_n = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(3) $\forall p \in \mathbb{R}$, si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, Alors $\lim_{n\to\infty} pa_n = pa$.

Dém: Soit $p>0$. Soit $\varepsilon>0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{p} \Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{p} \leq a_n - a \leq \frac{\varepsilon}{p} \Leftrightarrow -\varepsilon \leq pa_n - pa \leq \varepsilon$

$\Rightarrow |pa_n - pa| \leq \varepsilon \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} pa_n = pa$

(4) Soit $(a_n \cdot b_n)$ convergente.

$\Rightarrow$ Soit (a_n) et (b_n) convergent. $\quad a_n = \frac{1}{n+1}$, $b_n = 1 \Rightarrow a_n b_n = \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow$ Soit (a_n) et (b_n) divergent $\quad a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1} \Rightarrow a_n b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n+1}$ conv

$\Rightarrow$ Soit une converge, l'autre diverge $\quad a_n = (n+1)$, $b_n = \frac{1}{(n+1)^2} \Rightarrow a_n b_n = \frac{1}{n+1}$ conv

Mais si $\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0 \Rightarrow (a_n)$ converge.

$$a_n = \frac{\overbrace{(a_n b_n)}^{\text{conv}}}{\underbrace{b_n}_{\text{conv}}} \qquad \lim_{n\to\infty}(b_n) = b \neq 0 \Rightarrow \text{Par Prop (3)} \Rightarrow (a_n) \text{ converge.}$$

(5) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors la suite $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ est divergente, si elle existe

Dém: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_n - 0| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |a_n| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{a_n}\right| \geq \frac{1}{\varepsilon}$

Soit $M>0$. On choisit $\varepsilon = \frac{1}{M} \Rightarrow \forall n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{a_n}\right| \geq \frac{1}{\varepsilon} = M$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{a_n}\right)$ n'est pas bornée $\Rightarrow$ divergente ▨

Proposition. Quotient de deux suites polynomiales.

$$x_n = a_p n^p + \dots \quad a_1 n + a_0 \quad , a_i \in \mathbb{R} \, , \, a_p \neq 0 \quad , \quad p, q \in \mathbb{N}^*$$

$$y_n = b_q n^q + \dots \quad + b_1 n + b_0 \quad , b_i \in \mathbb{R} \quad b_q \neq 0.$$

Alors
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \begin{cases} 0, & \text{si } p < q \\ \dfrac{a_p}{b_q}, & \text{si } p = q \\ \text{divergente}, & \text{si } p > q \end{cases}$$

Idée:

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{a_p n^p + \dots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \dots + b_1 n + b_0} = \frac{n^p}{n^q} \underbrace{\frac{\left(a_p + \overbrace{a_{p-1}\frac{1}{n}}^{\to 0} + \dots + \overbrace{a_0 \frac{1}{n^p}}^{\to 0}\right)}{\left(b_q + \underbrace{b_{q-1}\frac{1}{n}}_{\to 0} + \dots + \underbrace{b_0 \frac{1}{n^q}}_{\to 0}\right)}}_{\to \frac{a_p}{b_q}} = \begin{cases} \dfrac{n^p}{n^q} \overset{q>p}{=} \dfrac{1}{n^{q-p>0}} \longrightarrow 0 \\ \dfrac{n^p}{n^q} \overset{p=q}{=} 1 \longrightarrow \dfrac{a_p}{b_q} \\ \dfrac{n^p}{n^q} \overset{p>q}{=} n^{p-q>0} \quad \text{divergente pas bornée.} \end{cases}$$

Ex.

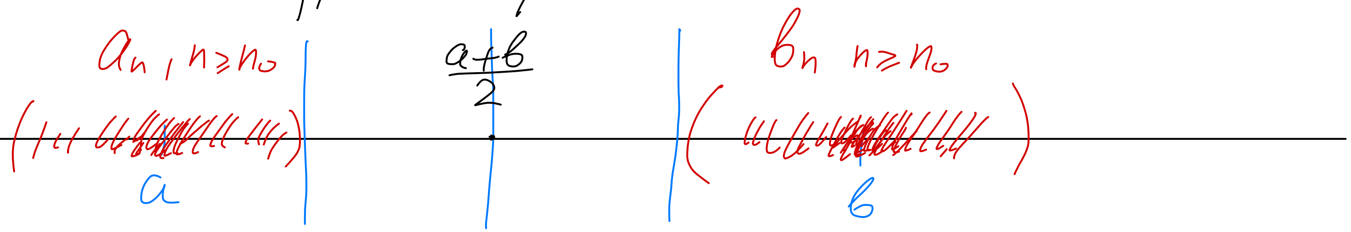
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n+1}{2n^2+n+10} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}+\frac{10}{n^2}} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-n^3+20n+1}{n^4+3n^3+5n^2+6} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n^3}{n^4}}_{\to 0} \frac{\overbrace{\left(-1+\frac{20}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}^{\to -1}}{\underbrace{\left(1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{6}{n^4}\right)}_{\to 1}} = 0$$

Relation d'ordre.

Proposition Soient (a_n) et (b_n) deux suites convergentes $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.
Supposons que $\exists m_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq m_0 \Rightarrow a_n \geq b_n$. Alors $a \geq b$.

Dém: Par absurde. Supposons que $a < b$. Soit $\varepsilon = \frac{b-a}{4} > 0$



$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon$ et $b - \varepsilon \leq b_n \leq b + \varepsilon$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n \leq a + \varepsilon < \frac{a+b}{2} < b - \varepsilon \leq b_n \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad a_n < b_n$

$\forall n \geq m_0 \quad a_n \geq b_n$

$\Rightarrow \forall n \geq \max(n_0, m_0) = \begin{cases} a_n < b_n \\ a_n \geq b_n \end{cases}$

contradiction

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a \geq \lim_{n\to\infty} b_n = b$

$\square$

Théorème de deux gendarmes pour les suites

Soient (a_n), (b_n), (c_n) trois suites telles que

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \ell$

(2) $\exists\, k \in \mathbb{N} : \forall n \geq k \Rightarrow a_n \leq b_n \leq c_n$

Alors $\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$.

<u>Dém:</u> Soit $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$ on a:

$$-\varepsilon \leq a_n - \ell \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad -\varepsilon \leq c_n - \ell \leq \varepsilon$$

$\forall n \geq k$: $\quad a_n - \ell \leq b_n - \ell \leq c_n - \ell$

$\forall n \geq \max(n_0, k) \quad -\varepsilon \leq a_n - \ell \leq b_n - \ell \leq c_n - \ell \leq \varepsilon$

$\Rightarrow -\varepsilon \leq b_n - \ell \leq \varepsilon \quad \forall n \geq \max(n_0, k)$.

$\Leftrightarrow |b_n - \ell| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq \max(n_0, k) \Rightarrow$ par la définition de la limite

$\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

ℓ

$\blacksquare$

Exemples : Deux gendarmes.

(1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+6n\cos n}{4n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(5+\frac{6\cos n}{n}\right)}{n^2\left(4+\frac{3}{n^2}\right)}$$

$$n \geq 1 \Rightarrow -1 \leq \cos n \leq 1$$

$$\underbrace{-\frac{6}{n}}_{\to 0} \leq \frac{6\cos n}{n} \leq \underbrace{\frac{6}{n}}_{\to 0} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{6\cos n}{n} = 0$$

par les 2 gendarmes

(2) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n^2+1}}{5n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n^2}\sqrt{1+\frac{1}{3n^2}}}{5n+2} \overset{n>0}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3}\,\cancel{n}\sqrt{1+\frac{1}{3n^2}}}{\cancel{n}\left(5+\frac{2}{n}\right)} = \lim \frac{\sqrt{3}\overbrace{\sqrt{1+\frac{1}{3n^2}}}^{\to 1}}{\underbrace{5+\frac{2}{n}}_{\to 5}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

$$\underbrace{1}_{\to 1} \leq \underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{3n^2}}}_{\to 1} \leq \sqrt{1+\frac{1}{3n^2}+\left(\frac{1}{6n^2}\right)^2} = \sqrt{\left(1+\frac{1}{6n^2}\right)^2} = \underbrace{1+\frac{1}{6n^2}}_{\to 1}$$

par les 2 gendarmes

Question 7. La suite suivante est divergente :

A. $$\frac{n^4\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)+5n^2+2}{3n^4+2n^3+n}$$

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\overbrace{\frac{5}{n^2}+\frac{2}{n^4}}^{\to 0}}{3+\underbrace{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}}_{\to 0}}$$

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{3}\in\left\{0,\frac{1}{3},0,-\frac{1}{3},\dots\right\}$$

divergente

B. $$\frac{n^2\sin(2n^2+3)-1}{2n^3+6n+1}$$

$$\frac{\overbrace{\frac{\sin(2n^2+3)}{n}-\frac{1}{n^3}}^{\to 0}}{\underbrace{2+\frac{6}{n^2}+\frac{1}{n^3}}_{\to 2}}\to 0$$

$$\underset{\substack{\downarrow\\0}}{-\frac{1}{n}}\le\frac{\sin(2n^2+3)}{n}\le\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{1}{n}}$$

C. $$\frac{n^3+4n+2}{n^3+3n^2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)+1}$$

$$\frac{1+\overbrace{\frac{4}{n^2}+\frac{2}{n^3}}^{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{3\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n}+\frac{1}{n^3}}_{\to 0}}\to 1$$

$$3\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\in\{3,0,-3,0\dots\}$$

$$\underset{\substack{\downarrow\\0}}{-\frac{3}{n}}\le\frac{3\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n}\le\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{3}{n}}$$

D. $$\frac{2+\cos(\pi n^2)}{7n^2+n^2\cos(n^2)}$$

$$\frac{1}{n^2}\;\frac{2+\cos(\pi n^2)}{7+\cos(n^2)}\to 0$$

$$\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{1}{n^2}\frac{1}{8}}\le\frac{1}{n^2}\,\frac{2+\cos(\pi n^2)}{7+\cos(n^2)}\le\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{1}{n^2}\,\frac{3}{6}}$$

$\cos(\pi n^2)\in\{\pm 1\}$ $\qquad -1\le\cos(n^2)\le 1$