

Chapitre 2. Suites des nombres réels.

Exemples des suites. Raisonnement par récurrence.


Def Une suite de nombres réels est une application $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout nombre naturel (pour tout $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$)

Notation: (a_n) - suite où $a_n = f(n)$; $(a_n)_{n \geq 0} = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ ensemble ordonné $\forall a_i \in \mathbb{R}$

Ex. (1) $a_n = n$ $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$

(2) $a_n = \frac{1}{n+1}$ $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$

(3) $a_n = (-1)^n$ $\{1, -1, 1, -1, \dots\}$

(4) $f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+2} = f_n + f_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ Suite de Fibonacci 
définie par récurrence $\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$

(5) Suite arithmétiques $a_n = a \cdot n + b$ $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$

(6) Suite géométrique $a_n = a \cdot r^n$ $a, r \in \mathbb{R}, a \neq 0, r \neq 0$

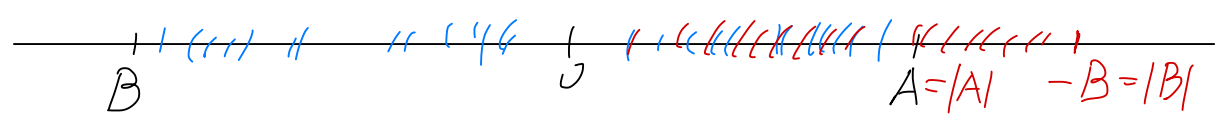
Déf. Une suite est majorée (minorée) s'il existe un nombre M (m) réel $\in \mathbb{R}$ ($\in \mathbb{R}$) tel que $a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ($a_n \geq m \quad \forall n \in \mathbb{N}$)

un majorant (un minorant)

On dit que la suite est bornée si elle est majorée et minorée.

Remarque. Déf $|x| \stackrel{\text{dét}}{=} x$ si $x \geq 0, x \in \mathbb{R}$ valeur absolue de $x \in \mathbb{R}$
 $|x| \stackrel{\text{dét}}{=} -x$ si $x < 0, x \in \mathbb{R}$

(a_n) est bornée $\Leftrightarrow \exists M \geq 0$ tel que $|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$



Si $B \leq a_n \leq A \Rightarrow$
 $M = \max(|A|, |B|)$
 $\Rightarrow |a_n| \leq M$

Déf. Une suite (a_n) est croissante (strictement croissante) si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_{n+1} \geq a_n$ ($a_{n+1} > a_n$)

Une suite (a_n) est décroissante (strictement décroissante) si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_{n+1} \leq a_n$ ($a_{n+1} < a_n$)

Une suite est dite (strictement) monotone si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

Ex. (1) $a_n = n$ strictement croissante: $a_{n+1} - a_n = n+1 - n = 1 > 0$

Elle n'est pas majorée: \mathbb{N} n'est pas majoré (on a démontré avant)

Elle est minoré par 0.

(2) $a_n = \frac{1}{n+1}$ strictement décroissante: $a_{n+1} = \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1} = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

bornée $0 < \frac{1}{n+1} \leq 1$

(3) $a_n = (-1)^n$ pas monotone, bornée: $-1 \leq a_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(5) $a_n = a \cdot n + b$ Strictement croissante si $a > 0$, strictement décroissante si $a < 0$

$a_{n+1} - a_n = a(n+1) + b - a \cdot n - b = a$ ↙ Archimède

Si $a > 0 \Rightarrow \forall S > 0 \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} : a_n > S - b \Leftrightarrow a_n + b > S$

$\Rightarrow (a_n)$ n'est pas majorée, elle est minorée par b

Si $a < 0 \Rightarrow (a_n)$ n'est pas minorée, elle est majorée par b .

(4) $f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ (somme des nombres naturels $f_0 \geq 0, f_1 \geq 0$.)
 $f_{n+2} - f_{n+1} = f_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
croissante

(f_n) n'est pas majorée +
$$\left\{ \begin{array}{l} f_{n+1} - f_n \geq 1 \\ f_n - f_{n-1} \geq 1 \\ \vdots \\ f_3 - f_2 = 1 \\ f_2 = 1 \end{array} \right.$$

 $f_{n+1} \geq n$

puisque \mathbb{N} n'est pas majoré et $f_{n+1} \geq n \quad \forall n \geq 1$
 \Rightarrow la suite (f_n) n'est pas majorée.

Raisonnement par récurrence. Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n , telle que (1) Initialisation: $P(n_0)$ est vraie, et (2) Hérédité: Pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ implique $P(n+1)$.

Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Proposition $f_n^2 - f_{n+1}f_{n-1} = (-1)^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$, où (f_n) est la suite de Fibonacci.

Soit $P(n)$ la proposition \uparrow

(1) L'initialisation: $n=1$: $f_1^2 - f_2 \cdot f_0 = 1^2 - 1 \cdot 0 = 1 = (-1)^{1-1} = 1$ **Vrai**

(2) L'hérédité. Supposons que $P(n)$ soit vraie. Considérons $P(n+1)$

$$\begin{aligned} f_{n+1}^2 - f_{n+2} \cdot f_n &= f_{n+1}(f_{n-1} + f_n) - (f_n + f_{n+1}) \cdot f_n = f_{n+1}f_{n-1} + \cancel{f_{n+1}f_n} - f_n \cdot f_n - \cancel{f_{n+1}f_n} = \\ &= f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = - \underbrace{(f_n^2 - f_{n+1}f_{n-1})}_{\substack{\text{par } P(n) \\ = (-1)^{n-1}}} = -(-1)^{n-1} = (-1)^n \\ &\Rightarrow f_{n+1}^2 - f_{n+2} \cdot f_n = (-1)^n \end{aligned}$$

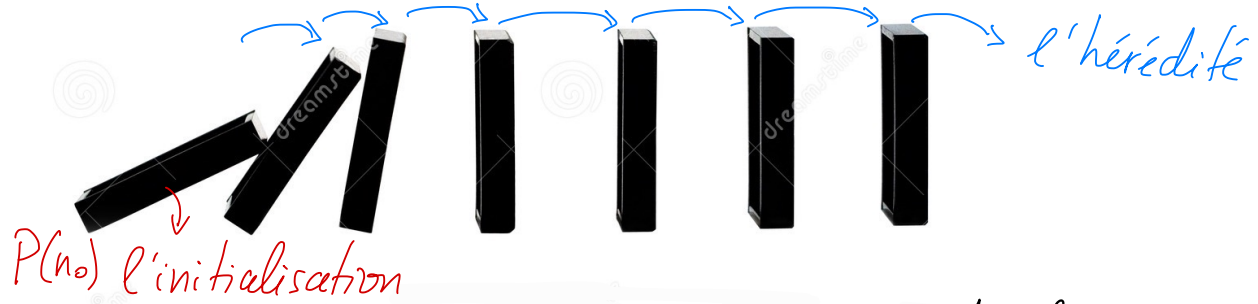
Par récurrence, $P(n)$ est vraie $\forall n \geq 1$



Remarque. Généralisation de la méthode de récurrence: Soit $P(n)$ une proposition qui dépend de $n \in \mathbb{N}$.

- (1) $P(n_0), P(n_0+1), \dots, P(n_0+k)$, k fixé sont vraies
 - (2) $\{P(n), P(n+1), \dots, P(n+k)\} \Rightarrow P(n+k+1) \quad \forall n \geq n_0$
- $\Rightarrow P(n)$ est vraie $\forall n \geq n_0$

Démonstration
par récurrence:



Il est important à démontrer les deux parties de l'argument:
l'initialisation et l'hérédité

Contre-exemple 1

Hypothèse : Tout nombre naturel est égal au nombre naturel suivant.

Hérédité : Supposons que $P(n)$ est vraie : $n = n+1$

Alors en ajoutant 1 à l'égalité on obtient $n+1 = n+2 \Rightarrow P(n+1)$ est vraie.

Faute : On a oublié l'initialisation, mais $0 \neq 1$ (Axiome de \mathbb{R})
 \Rightarrow L'hypothèse n'a pas été démontrée.

Ex Trouver la somme de n premiers nombres naturels impairs.

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + 3 = 4$$

$$S_3 = 1 + 3 + 5 = 9$$

$$S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

⋮

Hypothèse: $S_n = \underbrace{\sum_{k=1}^n (2k-1)}_{P(n)} = n^2$

Dém: par récurrence: (1) Initialisation: déjà démontré pour $n = 1, 2, 3, 4$
(2) Hérité: Supposons que $S_n = n^2$. Il faut en dériver que $S_{n+1} \stackrel{?}{=} (n+1)^2$

$$S_{n+1} = \underbrace{1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)}_{S_n} + (2n+1) = S_n + (2n+1) \stackrel{P(n)}{=} n^2 + (2n+1) = (n+1)^2 \text{ Vrai.}$$

=> par récurrence $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$



Contre-exemple 2.

Hypothèse „Tous les crayons sont de la même couleur“
(dans n'importe quel ensemble de $n \geq 1$ crayons).

Dém: (i) Initialisation: $n = 1$

Dans un ensemble d'un seul crayon
tous les crayons sont de la même couleur.

=> $P(1)$ est vraie.



(2) Hérité: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

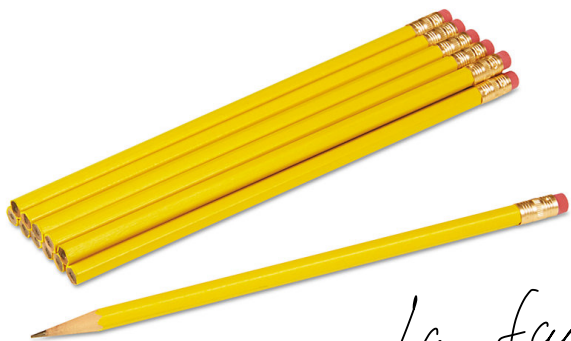
On suppose que tout ensemble de n crayons contient seulement des crayons de la même couleur.

Soit $\{c_1, c_2, \dots, c_{n+1}\}$ un ensemble de $(n+1)$ crayons

Alors $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ sont tous de la même couleur
ensembles de n éléments $\{c_2, c_3, \dots, c_{n+1}\}$ sont tous de la même couleur (par $P(n)$) \Rightarrow

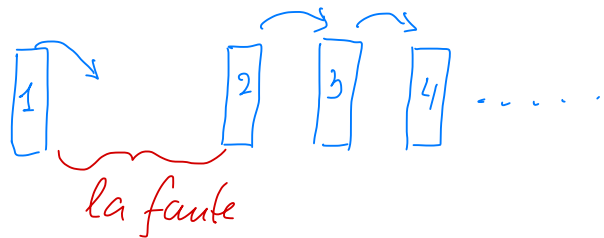
$\{c_1, c_2, \dots, c_n, c_{n+1}\}$ sont tous de la même couleur $\Rightarrow P(n+1)$
même couleur
même couleur

Par récurrence, tous les crayons sont de la même couleur



La faute: L'hérité $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est démontré seulement pour $n \geq 2$
Pourtant l'initialisation est démontré seulement pour $n=1$

Mais $P(1) \not\Rightarrow P(2)$

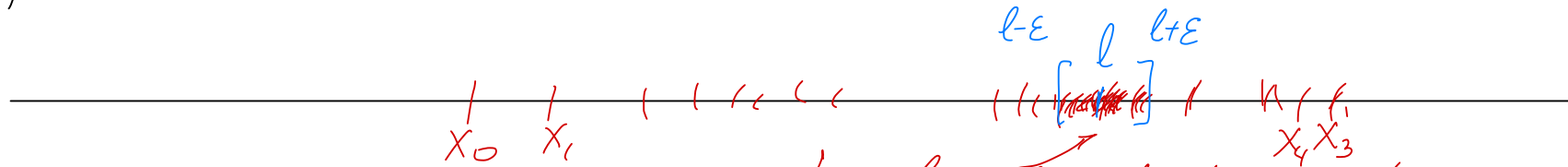


Limites des suites.

Def. On dit que la suite (x_n) est **convergente** et admet pour **limite** le nombre réel $l \in \mathbb{R}$ si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $|x_n - l| \leq \epsilon$.

Notation: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$.

Remarque $|x_n - l| \leq \epsilon \iff -\epsilon \leq x_n - l \leq \epsilon \iff l - \epsilon \leq x_n \leq l + \epsilon$



tous les éléments de la suite après x_{n_0}

Quel que soit $\epsilon > 0$ on peut toujours trouver $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que tous les éléments de la suite $(x_n)_{n \geq n_0}$ se trouvent dans l'intervalle $[l - \epsilon, l + \epsilon]$.

Def. Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Ex. La suite (a_n) , $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, est convergente, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$.

Dém: Soit $\varepsilon > 0$. Il faut démontrer l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$
(qui peut dépendre de ε)
tel que $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - 0| \leq \varepsilon$

Donc : $|\frac{1}{\sqrt{n+1}} - 0| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} \leq \sqrt{n+1} \Leftrightarrow n+1 \geq \frac{1}{\varepsilon^2} \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon^2} - 1$

Soit $n_0 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \rfloor \Rightarrow n_0 + 1 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \rfloor + 1 > \frac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2} - 1$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \Rightarrow n+1 \geq n_0+1 > \frac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow |\frac{1}{\sqrt{n+1}} - 0| < \varepsilon$

\Rightarrow Pour tout $\varepsilon > 0 \exists n_0 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \rfloor \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$ on a $|\frac{1}{\sqrt{n+1}} - 0| \leq \varepsilon$

\Rightarrow par la définition de la limite $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$ ▣

Autrement: puisque \mathbb{N} n'est pas borné $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon^2} - 1$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \Rightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon^2} - 1 \Rightarrow n+1 \geq \frac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow |\frac{1}{\sqrt{n+1}} - 0| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$ ▣

Question 6.

La suite suivante est divergente:

$$A: a_n = \frac{1}{f_{n+2} - f_{n+1} + 2}$$

$$B: b_n = (-1)^n \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$C: c_n = \frac{1}{\tan\left(5\pi n + \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$D: d_n = (-1)^{(8^n - 3^n)}$$

$$E: e_n = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi n\right)$$

où f_n sont des nombres de Fibonacci $a_n = \frac{1}{f_{n+2}} \leq \frac{1}{n-1+2} = \frac{1}{n+1}$
 $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0: \forall n \geq n_0, \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{f_{n+2}} - 0 \right| < \varepsilon$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
 $b_n = (-1)^n \cdot (-1)^n = 1$ suite const.
 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$

$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha \Rightarrow c_n = \frac{1}{\sqrt{3}}$ constante
 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$d_n = 1, -1, -1, -1, \dots$ $8^n - 3^n$ est impaire $\forall n \geq 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = -1$

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) = -\frac{1}{2}$, $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha$
 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow e_n = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots$ divergente.