**Rappel :** $z = a+ib = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$, $\rho = |z|$, $\varphi = \arg z$

cartésienne — polaire trig. — polaire exp.

$a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$

**Formule de Moivre.** $(\rho e^{i\varphi})^n = \rho^n e^{in\varphi}$, $\rho > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$ à $2k\pi$ près $/ k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$

**Ex.** $z = 5\sqrt{3} + 5i$. Trouver $z^{15}$

$z^{15} = (5\sqrt{3}+5i)^{15}$ = [coefficients binomiaux] - très long

$\operatorname{Re} z = 5\sqrt{3} > 0$

$\Rightarrow z = 5\sqrt{3}+5i = \underline{10e^{i\frac{\pi}{6}}}$  $|z| = \sqrt{75+25} = 10$, $\arg = \arctan\frac{5}{5\sqrt{3}} =$

$= \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

Par de Moivre $z^{15} = (10e^{i\frac{\pi}{6}})^{15} = 10^{15}e^{i\frac{5\pi}{2}} =$

$= 10^{15}e^{\frac{\pi}{2}i} = 10^{15}i$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

## Conjugaison

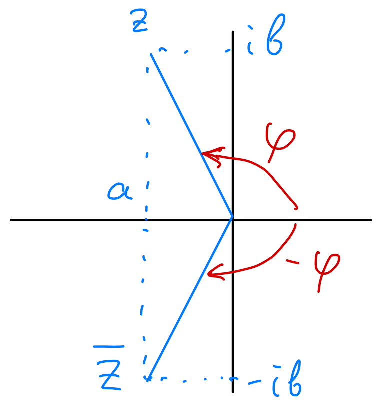
**Déf** $z = a+ib \in \mathbb{C}$ alors le conjugué de $z$ est $\underline{\bar{z} \overset{\text{déf}}{=} a - ib}$

Si $\bar{z} \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \Rightarrow$ $\boxed{z\bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}}$

En forme polaire :

$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow \bar{z} = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi) =$

$= \rho(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) \Rightarrow \underline{\bar{z} = \rho e^{-i\varphi}}$



**Propriétés:**

(1) $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$

(2) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

(3) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}, w \neq 0$

(4) $|\bar{z}| = |z|$

Exercice: démontrer les propriétés en forme cartesienne en forme polaire

(5) $z = a + ib$, $\bar{z} = a - ib \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \\ b &= \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i} \end{aligned}} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

En particulier, si $|z| = 1$
$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \\ \sin\varphi &= \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \end{aligned}}$$

**Application:** Exprimer $\sin^4\varphi$ en terme des fonction d'angle multiple

$$\sin^4\varphi = \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4i\varphi} - 4e^{3i\varphi}e^{-i\varphi} + 6e^{2i\varphi}e^{-2i\varphi} - 4e^{i\varphi}e^{-3i\varphi} + e^{-4i\varphi}\right) =$$

$$\boxed{\begin{aligned} (a-b)^4 &= a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - \\ &\quad - 4ab^3 + b^4 \\ a = e^{i\varphi}&, \ b = e^{-i\varphi} \end{aligned}}$$

$$= \frac{1}{16}\Big(\underbrace{e^{4i\varphi} - \underbrace{4e^{2i\varphi} + 6 - 4e^{-2i\varphi}}_{-8\cos 2\varphi} + e^{-4i\varphi}}_{2\cos 4\varphi}\Big) = \frac{1}{8}\cos(4\varphi) - \frac{1}{2}\cos(2\varphi) + \frac{3}{8}.$$

## Racines des nombres complexes

**Proposition** Si $w = se^{i\varphi}$, $w \in \mathbb{C}^*$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\{z \in \mathbb{C}^* : z^n = w\} = \left\{ \sqrt[n]{s}\, e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}},\ k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$$

**Dém:** Soit $z = re^{i\vartheta}$, $r > 0$, $\vartheta \in \mathbb{R}$. Supposons que $z^n = w \overset{\text{de Moivre}}{\Longrightarrow} r^n e^{in\vartheta} = se^{i\varphi}$

$\Rightarrow r^n = s > 0 \Rightarrow r = \sqrt[n]{s}$ et $n\vartheta = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \vartheta = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $k = 0 \Rightarrow \dfrac{\varphi}{n}$

$k = n \Rightarrow \dfrac{\varphi}{n} + 2\pi$ $\Rightarrow$ même solution pour $k$, $k+n$

$\Rightarrow \left\{\vartheta = \dfrac{\varphi+2k\pi}{n},\ k = 0, 1, 2 \dots n-1\right\}$

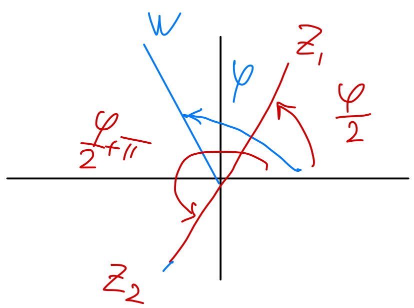
$\Rightarrow \{z \in \mathbb{C}^* : z^n = w\} = \left\{\sqrt[n]{s}\, e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}},\ k = 0, 1, \dots, n-1\right\}$ $n$ solutions $\square$

**Racines carrées.** $z^2 = w = se^{i\varphi}$, $s > 0$ Alors:

$$\left\{z = \sqrt{s}\, e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{2}},\ k = 0, 1\right\} = \left\{\sqrt{s}\, e^{i\frac{\varphi}{2}},\ \sqrt{s}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)}\right\} = \left\{\sqrt{s}\, e^{i\frac{\varphi}{2}},\ -\sqrt{s}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}\right\}$$

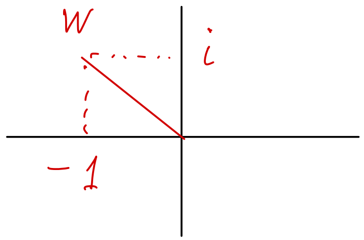
$\Rightarrow$ il existe 2 racines carrés pour tout $w \neq 0$, $w \in \mathbb{C}$

$\pm\sqrt{s}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}$




$z_1^2 = z_2^2 = w$, $z_1 = -z_2$.

**Ex** Resoudre $(-1+i) = z^3$, $z \in \mathbb{C}$




Soit $w = -1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$ (voir cours 4)

$\Rightarrow$ Proposition $\Rightarrow$ $\left\{ z : z^3 = W \right\} = \left\{ \sqrt[3]{\sqrt{2}} \cdot e^{i\frac{\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)}{3}},\ k=0,1,2 \right\}$

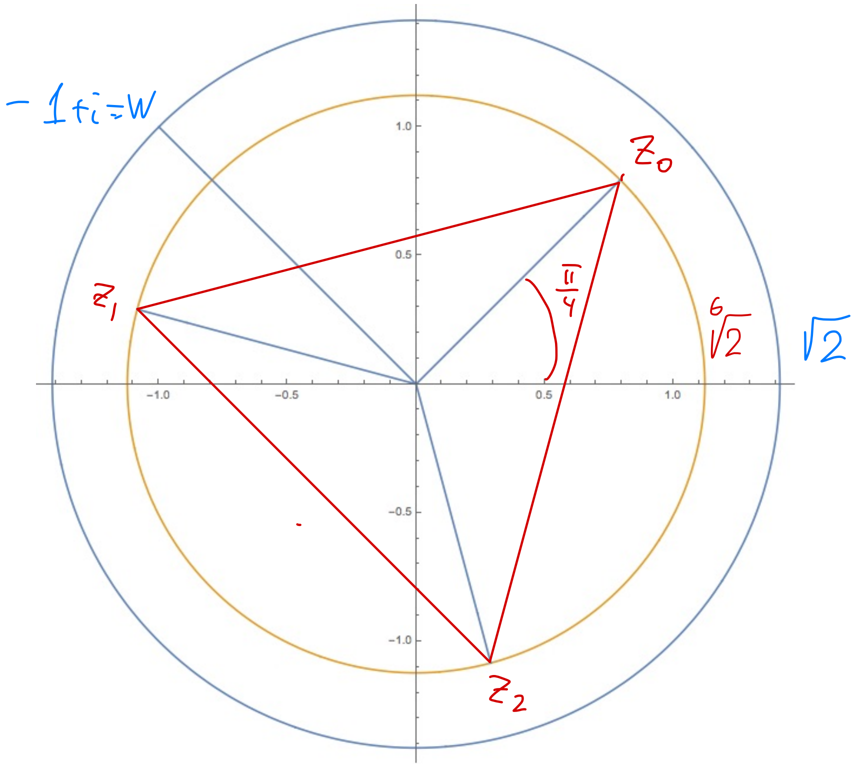
$$= \left\{ \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}},\ k=0,1,2 \right\}$$

**Exercice:** Calculer les arguments des 3 racines $z_0, z_1, z_2$

$k=0 \Rightarrow z_0 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$k=1 \Rightarrow z_1 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{11\pi}{12}}$

$k=2 \Rightarrow z_2 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)} = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{19\pi}{12}}$




Les solutions se trouvent aux sommets d'un triangle équilateral.

Question 5 Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Alors l'équation $\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^3 = \bar{z}$ possède

(A) Exactement 5 solutions dans $\mathbb{C}^*$

(B) Exactement 7 solutions dans $\mathbb{C}^*$

(C) Exactement 3 solutions dans $\mathbb{C}^*$

(D) Un nombre infini de solutions dans $\mathbb{C}^*$

(E) Exactement 1 solution dans $\mathbb{C}^*$

Soit $z = \rho e^{i\varphi}$ $\rho > 0$

$$\left(\frac{\cancel{\rho} e^{i\varphi}}{\cancel{\rho} e^{-i\varphi}}\right)^3 = \rho e^{-i\varphi} \Rightarrow$$

$$\left(e^{2i\varphi}\right)^3 = \rho e^{-i\varphi} \Rightarrow$$

$$e^{6i\varphi} = \rho e^{-i\varphi} \Rightarrow$$

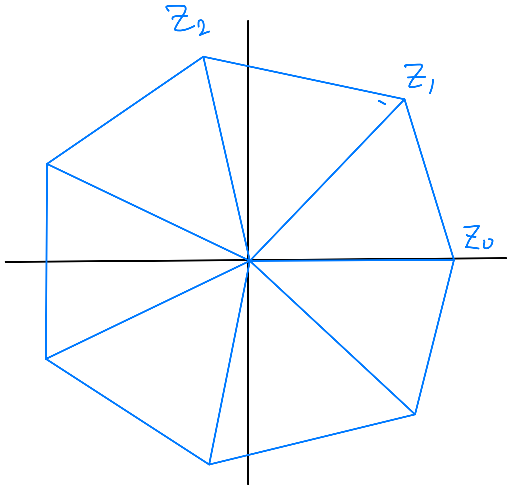
$$e^{7i\varphi} = \rho \Rightarrow \underline{\rho = 1}$$

$$\left(e^{i\varphi}\right)^7 = 1 = e^{i0}$$

Proposition $\Rightarrow \varphi = \left\{ \frac{0 + 2k\pi}{7}, k = 0, 1, \dots 6 \right\}$

7 solutions

En général, les racines $n$-ièmes de $w = re^{i\varphi}$ sont situées sur un cercle de rayon $\sqrt[n]{r}$ aux sommets d'un polygône regulier à $n$ côtés $\left\{\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right\}_{k=0,..,n-1}$




L'orientation du polygône dépend de l'argument $\varphi$ de $w$.

# Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$.

**Qudratique.** dans $\mathbb{C}$ $\quad az^2+bz+c=0$, $\quad a,b,c\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$

$\Rightarrow z = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $\leftarrow$ racine carrée d'un nombre comlexe : $w\in\mathbb{C} : w^2=b^2-4ac$

$\Rightarrow$ Si $b^2-4ac=0 \Rightarrow$ il existe une seule solution $z=-\dfrac{b}{2a}$ à multiplicité 2

Si $b^2-4ac\neq 0 \Rightarrow$ il existe toujours 2 solutions complexes.

## Théorème fondamental de l'algèbre (sans démonstration)

Tout polynôme $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1z+a_0$ $\quad a_n, a_{n-1}\dots a_0\in\mathbb{C}$, $a_n\neq 0$

s'écrit sous la forme $P(z)=a_n(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)$, où $z_1\dots z_n\in\mathbb{C}$

(peut-être avec des répétitions)

$$P(z)=a_n(z-w_1)^{m_1}(z-w_2)^{m_2}\dots(z-w_p)^{m_p} \quad \text{où } w_1\dots w_p\in\mathbb{C} \text{ distincts}$$

$$m_1+m_2+\dots+m_p=n, \quad m_1\dots m_p\in\mathbb{N}^*.$$

On dit que $m_i$ est la multiplicité de la racine $w_i$.

**Remarque:** Ce n'est pas vrai dans $\mathbb{R}$.

**Ex.** $(x^2+4x+9)(x^2+3)=P(x)$ degré 4 n'a pas de solutions réelles

**Exercice:** Ecrire $P(x)$ dans $\mathbb{C}$ en produit de 4 facteurs linéaires

$P(x)=(x+2-\sqrt{5}i)(x+2+\sqrt{5}i)(x+\sqrt{3}i)(x-\sqrt{3}i)$

Ex. Est-ce que le polynôme $P(z) = z^2 + (1-i)z - i$ est divisible par $(z-i)$ ?

On calcule $P(i) = i^2 + (1-i)i - i = -1 + i + 1 - i = 0 \Rightarrow z = i$ est une racine $\Rightarrow$ oui.

## Polynômes à coefficients réelles.

**Proposition** Si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de $P(z)$ à coefficients réels alors $\bar{z}$ l'est aussi.

**Dém**: Soit $P(z) = 0$, $P$ à coeff. réels, $a_i \in \mathbb{R}$, $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k}_{\text{notation}}$

$$\Rightarrow P(\bar{z}) = a_n \bar{z}^n + a_{n-1}\bar{z}^{n-1} + \ldots + a_1 \bar{z} + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{z}^k \underset{a_i \in \mathbb{R}}{\overset{a_i = \bar{a}_i}{=}} \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k \bar{z}^k = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} =$$

$$= \overline{P(z)} = \bar{0} = 0$$

$\Rightarrow$ Si $z$ est une solution $\Rightarrow \bar{z}$ l'est aussi (si les coeff. de $P$ sont réels). ▨

**Remarque.** Si $P(x)$ est à coeff. réels, et $z \in \mathbb{C}$ est une solution $\Rightarrow \bar{z} \in \mathbb{C}$ est aussi une solution $\Rightarrow P(z) = P(\bar{z}) = 0$ ($P(x)$ de degré $\geq 2$)

$(x-z)(x-\bar{z})$ divise le polynôme

$$(x-z)(x-\bar{z}) = x^2 - (z+\bar{z})x + z\bar{z} = \left(x^2 - (\underbrace{2\,\mathrm{Re}\, z}_{\in \mathbb{R}})x + \underbrace{|z|^2}_{\in \mathbb{R}}\right) \text{ divise } P(x)$$

<u>Conclusion</u> Tout polynôme non-constant à coefficients réels peut être factorisé en produit des polynômes à coefficients réels de degré 1 ou 2.

## Sous-ensembles du plan complexe.

<u>Ex 1.</u> Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ $r \in \mathbb{R}$ Considerons $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$

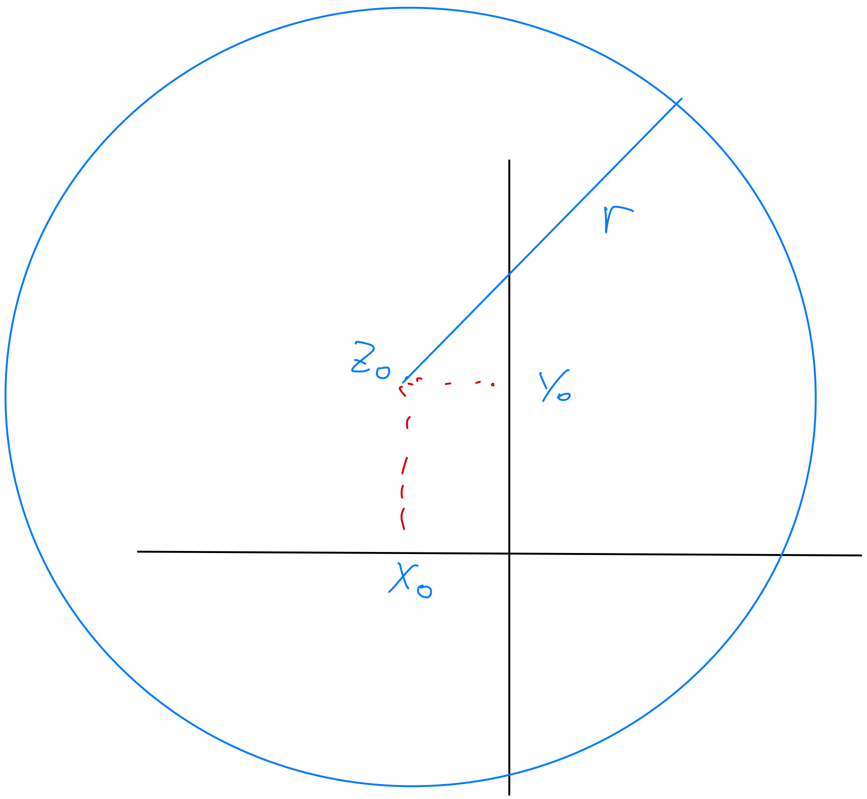
$\underset{\text{variable}}{z = x + iy}$ , $\underset{\text{fixé}}{z_0 = x_0 + iy_0}$

$|z - z_0| = |x + iy - x_0 - iy_0| = |x - x_0 + i(y - y_0)| =$

$= \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r$

$\Leftrightarrow \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Cercle de centre $(x_0, y_0) = z_0$
et rayon $r$



## Ex 2.

$$\left\{ z \in \mathbb{C}^* : \left(\frac{|z|}{z}\right)^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \right\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

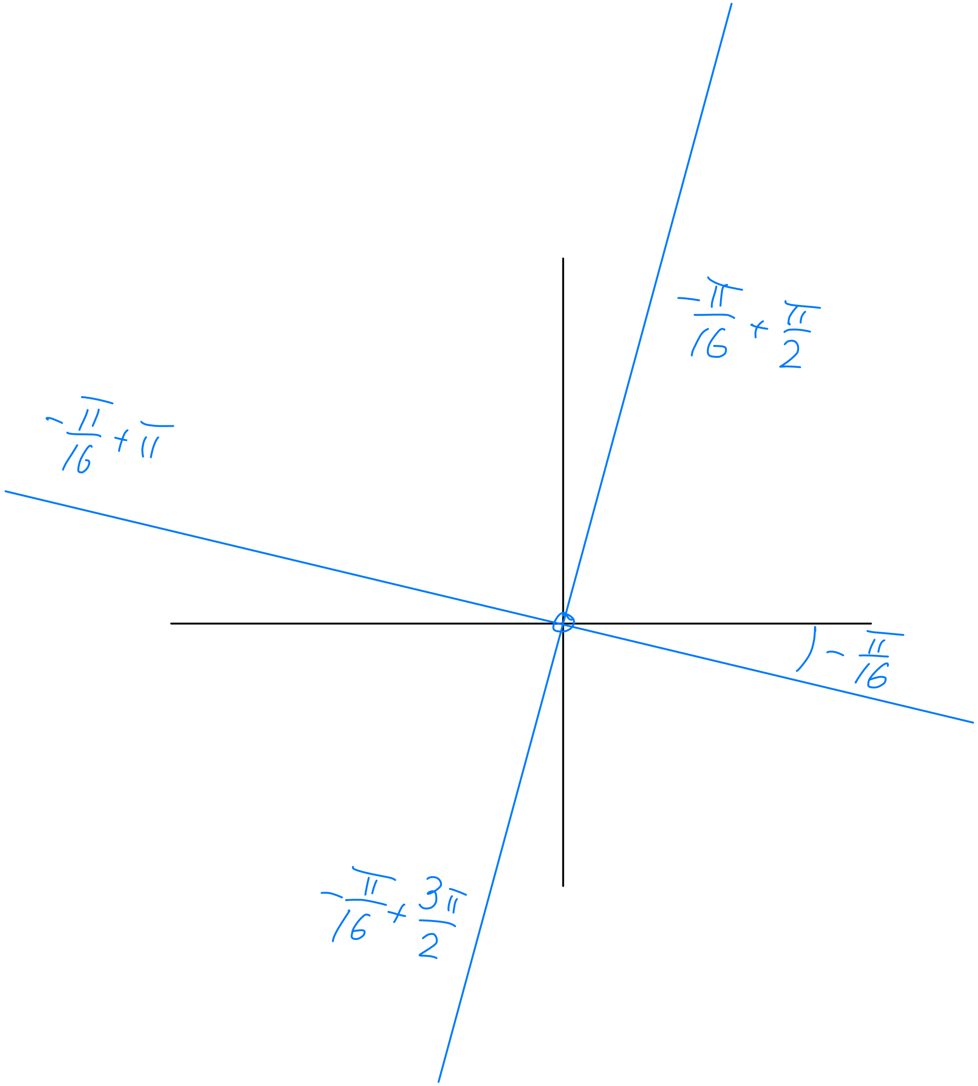
$$z = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow \left(\frac{|z|}{z}\right)^4 = \left(\frac{\cancel{\rho}}{\cancel{\rho} e^{i\varphi}}\right)^4 = e^{-4i\varphi} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{i\varphi}\right)^4 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \varphi \in \left\{ \frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4},\ k = 0, 1, 2, 3 \right\}$$

$\rho$ est arbitraire réel positif.

$\Rightarrow$ 4 demi-droites ouvertes



| Séances du soir, MATH-101 analyse I pour sections d'ingénierie<br>Automne 2025-2026. Semaines 4 à 13 comprises | | | |
|---|---|---|---|
| Jour | Horraire | Salle | Cours représentés |
| | | | |
| Lundi | 17h30-19h00 | CM 1 105 | SV, SIE/GC/SC, MT, IN<br>Strütt, Mila, Mounford, Lachowsa<br>F, A, D, E |
| Mardi | 17h30-19h00 | BS 170 | Inversée, EL/MX/CGC, IN, EN<br>pi, G, E, en<br>Friedli, Basterrechea, Lachowska, Monin |
| Mercredi | 17h30-19h00 | CO 122 | GM, MT<br>C, D<br>Friedli, Mountford |
| Jeudi | 18h15-19h45 | MA B1 11 | SIE/GC/SC, GM, EL/MX/CGC<br>A, C, G<br>Mila, Friedli, Basterrechea |

Principe : Vous êtes bienvenu·es à n'importe quelle séance. Les cours représentés sont donnés à titre d'information si vous avez besoin de parler à un·e assistant·e de votre cours pour une question spécifique.