§1.5. Nombres complexes. [DZ Chapitre 2]

On a vu que l'équation $x^2=2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$.
Maintenant : l'équation $x^2=-1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice: Dériver à partir des axiomes de $\mathbb{R}$ [DZ §1.1.5]

(1) Si $x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0$: $x \geq 0 \Rightarrow (x+(-x)) \geq -x \Rightarrow 0 \geq -x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(2) $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \cdot x = 0$: $\underline{0 \cdot x} = (0+0)\cdot x = \underline{0\cdot x + 0 \cdot x} \Rightarrow 0 = 0 \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \cdot x = (-x)\cdot(-x) \geq 0$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = 0 \cdot x = (x+(-x))\cdot x = x\cdot x + (-x)\cdot x = 0 \Rightarrow (-x)\cdot x = x\cdot(-x) = -x\cdot x \\ 0 = 0\cdot(-x) = (x+(-x))\cdot(-x) = x\cdot(-x) + (-x)\cdot(-x) = 0 \Rightarrow x\cdot(-x) = (-x)\cdot x = -((-x)\cdot(-x)) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot x = (-x)\cdot(-x). \quad \left.\begin{array}{l} \text{Si } x \geq 0 \Rightarrow x\cdot x = (-x)\cdot(-x) \geq 0 \\ \text{Si } x \leq 0 \Rightarrow (-x) \geq 0 \Rightarrow (-x)\cdot(-x) = x \cdot x \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x\cdot x \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}.$$

(4) $-1 < 0$: $1 \neq 0$ par axiome $\Rightarrow -1 \neq 0$. Si $-1 > 0 \Rightarrow (-1)\cdot(-1) = 1 \cdot 1 = 1 > 0$ absurde puisque on suppose $(-1) > 0$ (voir (1))
$\Rightarrow -1 < 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Par (3) on a : } x^2 \geq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \\ \text{Par (4) on a : } -1 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = -1 \text{ n'a pas de solution dans } \mathbb{R} \qquad \square$$

Alors on introduit le symbole „i" tel que $i^2 = -1$

On considère les expressions de la forme $\{z = a+ib\} \stackrel{def}{=} \mathbb{C}$, où $a, b \in \mathbb{R}$ avec les opérations suivantes:

(+) $(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$

$\exists\, 0 \in \mathbb{C} : 0+i0 = 0$ tel que $(a+ib)+0+i0 = a+ib \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

$\exists$ opposé pour $(a+ib)$: $(-a+i(-b))+(a+ib) = 0+i0 = 0$.

($\cdot$) $(a+ib)\cdot(c+id) = ac-bd+i(ad+bc)$

$\exists\, 1 \in \mathbb{C} : 1+i0 = 1 \quad : (a+ib)(1+i0) = a+ib \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

Si $z \in \mathbb{C} : z \neq 0 \Rightarrow \exists\, z^{-1} \in \mathbb{C} : z\cdot z^{-1} = z^{-1}\cdot z = 1$

Proposition Soit $z = a+ib \neq 0 \Rightarrow \exists\, z^{-1} = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$ $\quad (z \neq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2 \neq 0)$

Vérification: $(a+ib)\dfrac{a-ib}{a^2+b^2} = \dfrac{a^2+b^2+i(ab-ba)}{a^2+b^2} = \dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$

$$z = a+ib \in \mathbb{C}^* \Rightarrow \boxed{z^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}}$$

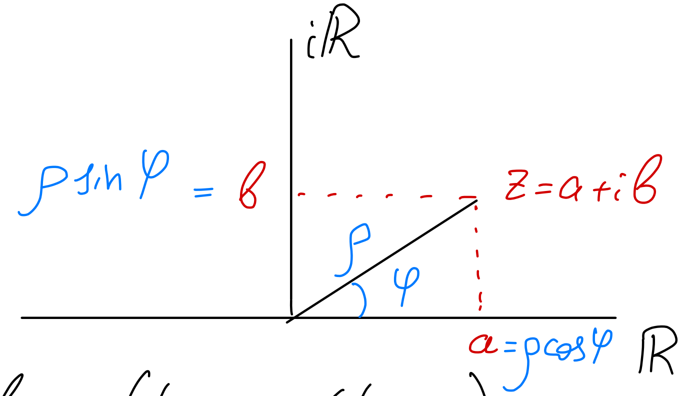
Exercice: vérifier la distributivité : $z_1(z_2+z_3) = z_1z_2+z_1z_3 \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

Donc $\mathbb{C}$ est un corps commutatif.

$\mathbb{C}$ n'est pas ordonné : Si $i > 0 \Rightarrow i^2 = -1 > 0$, $i < 0 \Rightarrow (-i)^2 = -1 > 0$ $\Big\}$ mais $-1 < 0 \Rightarrow$ absurde dans $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Remarque : On a deux racines complexes de l'équation $z^2 = -1$: $z_1 = i$ et $z_2 = -i$

3 formes des nombres complexes.



Forme cartésienne

$\boxed{z = a + ib}$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$

$$z = \underbrace{\mathrm{Re}\, z}_{\text{partie réelle}} + i\, \underbrace{\mathrm{Im}\, z}_{\text{partie imaginaire}}$$

$$\mathrm{Re}\, z = a \,, \quad \mathrm{Im}\, z = b \in \mathbb{R}$$

Le module de z

$$|z| = \sqrt{(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$$

$$|z| = 0 \underset{\text{si et seulement si}}{\iff} z = 0$$

Forme polaire (trigonométrique)

$\boxed{z = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)}$ $\quad \rho \geq 0,\ \varphi \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{Re}\, z = \rho\cos\varphi \,, \quad \mathrm{Im}\, z = \rho \sin\varphi$$

$$|z| = \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\varphi} = \rho \geq 0$$

le module de $z = \rho$

L'argument de z tel que $z \neq 0$

$$\rho \neq 0 \Rightarrow \sin\varphi = \frac{\mathrm{Im}\, z}{\rho} \,, \quad \cos\varphi = \frac{\mathrm{Re}\, z}{\rho}$$

$\Rightarrow \varphi$ est défini à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$

$$\tan\varphi = \frac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z} = \frac{b}{a} \quad \text{si } a = \mathrm{Re}\, z \neq 0.$$

Comment trouver l'argument d'un nombre complexe $z = a+ib$?

On utilise la fonction arctan x

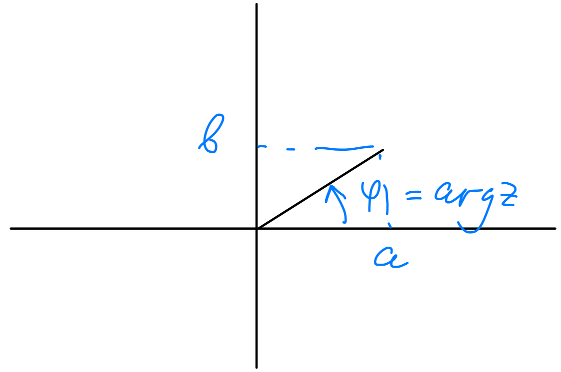
$\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Si $z = a+ib$: $a > 0$, alors

$\varphi = \arg z \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow$

$$\boxed{\arg z = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

à $2\pi k$ près, $k \in \mathbb{Z}$

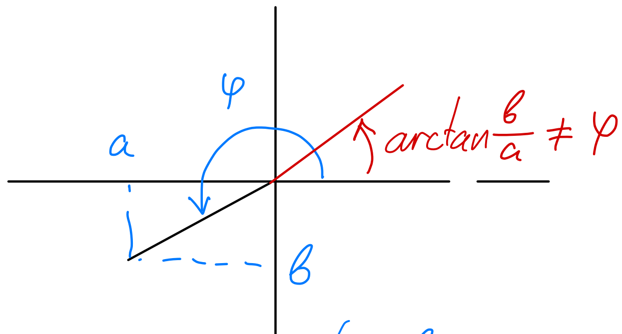


Si $z = a+ib$, $a < 0$, alors

$\varphi = \arg z \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\Rightarrow$

$$\boxed{\arg z = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi}$$

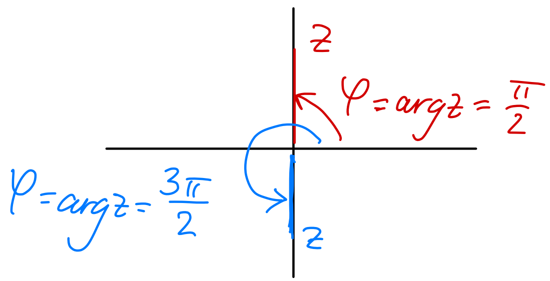
à $2\pi k$ près, $k \in \mathbb{Z}$



$\varphi = \arctan\frac{b}{a} + \pi$

Si $\operatorname{Re} z = a = 0 \Rightarrow \arg z = \frac{\pi}{2}$ si $\operatorname{Im} z = b > 0$

$\arg z = \frac{3\pi}{2}$ si $\operatorname{Im} z = b < 0$



Remarque L'argument de z est défini seulement pour $z \neq 0$.

Troisième forme de $z \in \mathbb{C}$: la forme polaire exponentielle.

Déf Soit $\underline{z = x+iy} \in \mathbb{C}$. Alors $\underbrace{e^z = \exp(z)}_{\text{exp complexe}} \overset{\text{déf}}{=} \underbrace{e^x}_{\text{exp réelle}}(\cos y + i \sin y)$

En particulier:

Si $z = x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \Rightarrow e^z = e^x(\cos 0 + i \sin 0) = e^x \quad (y=0)$

Si $z = iy \in i\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \Rightarrow e^z = e^0(\cos y + i \sin y) = e^{iy} \quad (x=0)$

$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i \sin y} \quad \text{Formule d'Euler } \forall y \in \mathbb{R}$$

$$e^{i(y_1+y_2)} = \cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2) = \underbrace{\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)}$$

$$\shortparallel$$

$$e^{iy_1} \cdot e^{iy_2} = (\cos y_1 + i \sin y_1)(\cos y_2 + i \sin y_2) = \overbrace{\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2)}$$

$$\Rightarrow e^{iy_1} \cdot e^{iy_2} = e^{i(y_1+y_2)}$$

$$= e^{iy_2} \cdot e^{i2k\pi}$$

Si $y_1 = y_2 + 2k\pi \Rightarrow e^{iy_1} = e^{i(y_2+2k\pi)} = e^{iy_2}(\underbrace{\cos 2k\pi}_{=1} + i \underbrace{\sin 2k\pi}_{=0}) = e^{iy_2}$

$k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ l'exponentielle purement imaginaire est 2π-periodique.

Rappel: forme polaire trigonométrique $z = \rho\underbrace{(\cos\varphi + i\sin\varphi)}_{e^{i\varphi}\ \text{(par déf)}} = \rho e^{i\varphi}$ ← forme polaire exponentielle

$$\boxed{z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = |z|\left(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)\right) = |z| \cdot e^{i\arg z}}$$

← les 3 formes d'un nombre complexe.

cartesienne — polaire trig. ⟷ polaire exp

où $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$ le module de z

Si $|z| \neq 0 \Rightarrow$

$$\arg z = \left.\begin{cases} \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right), & \text{si } \operatorname{Re} z > 0 \\ \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right) + \pi, & \text{si } \operatorname{Re} z < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } \operatorname{Re} z = 0 \text{ et } \operatorname{Im} z > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{si } \operatorname{Re} z = 0 \text{ et } \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}\right\} \text{défini à } 2k\pi \text{ près, } k \in \mathbb{Z}$$

Très souvent on écrit la forme polaire $\underline{z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}}$

Soit $y = \pi$, $x = 0 \Rightarrow z = x + iy = 0 + i\pi \Rightarrow e^z = e^{i\pi} = \underbrace{\cos\pi}_{=-1} + i\underbrace{\sin\pi}_{=0} = -1$

$$\boxed{e^{i\pi} = -1}$$

Formule d'Euler

Question 4.

Soit $z = e^{(e^{i\varphi})}$, $\varphi \in \mathbb{R}$

Alors :

A. $\arg z = \varphi$

B. $|z| = e^{\cos\varphi}$

C. $\operatorname{Im} z = e^{\sin\varphi}$

D. $|z| = 1$

E. $\operatorname{Im} z = \sin(\sin\varphi)$

$$z = e^{(e^{i\varphi})} = e^{\cos\varphi + i\sin\varphi} =$$

$$= e^{\cos\varphi} e^{i\sin\varphi} =$$

$$= e^{\cos\varphi}\left(\cos(\sin\varphi) + i\sin(\sin\varphi)\right)$$

$$|z| = e^{\cos\varphi}$$

$$\arg z = \sin\varphi$$

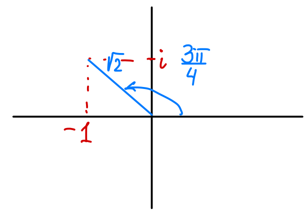
$$\operatorname{Im} z = e^{\cos\varphi}\sin(\sin\varphi)$$

$$\operatorname{Re} z = e^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi)$$

Ex 1 $z = -1 + i$ Forme polaire ?

$$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \arg z = \arctan \frac{1}{-1} + \pi = \arctan(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

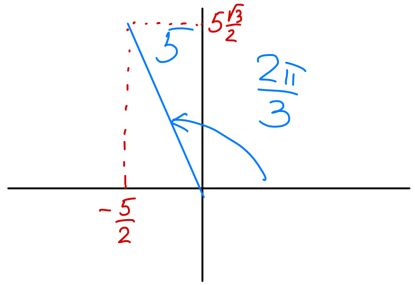
$\operatorname{Re} z < 0$



$$\Rightarrow \quad z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

Ex 2. $z = 5e^{i\frac{2\pi}{3}}$ Forme cartesienne ?

$$z = 5\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}\right) = 5\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underbrace{-\frac{5}{2}}_{\operatorname{Re} z} + i\underbrace{\frac{5\sqrt{3}}{2}}_{\operatorname{Im} z}$$



Multiplication en forme polaire.

Proposition. Soient $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$ $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$.

Alors $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2\, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Dém: $z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2\, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

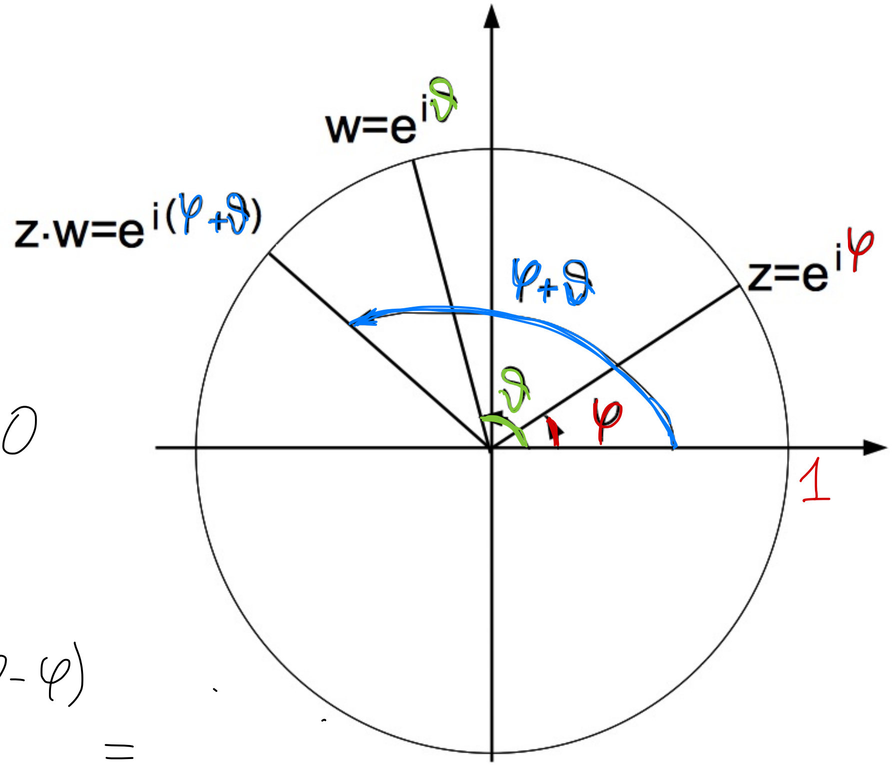
par la propriété de multiplication des exponentielles complexes.

Si $z_1 = |z_1|\, e^{i \arg z_1}$ $z_2 = |z_2|\, e^{i\arg z_2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{z_1 z_2 = |z_1||z_2| \cdot e^{i(\arg z_1 + \arg z_2)}}$ ▨

Ex 3. Soit $z = e^{i\varphi}$ $\quad |z| = 1$

$w = e^{i\vartheta}$, $\quad |w| = 1$

$\Rightarrow z \cdot w = e^{i(\varphi+\vartheta)}$



Division en forme polaire $\quad z = |z|\, e^{i \arg z} \neq 0$

$\Rightarrow z = \rho e^{i\varphi}, \rho > 0 \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi}$

Dém: $z \cdot z^{-1} = \rho e^{i\varphi} \cdot \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi} = \rho \cdot \frac{1}{\rho} e^{i(\varphi-\varphi)} =$

$= 1 \cdot e^{i \cdot 0} = 1$

Si $z_1 = |z_1|\, e^{i \arg z_1}$ $\quad z_2 = |z_2|\, e^{i \arg z_2}$, $z_2 \neq 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\arg z_1 - \arg z_2)}, \quad |z_2| \neq 0}$$

Proposition. (Formule de Moivre)

Pour tout $\rho > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\quad \left(\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = \rho^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right)$

$P(n)$: $\boxed{\left(\rho e^{i\varphi}\right)^n = \rho^n e^{in\varphi}}$ Formule de Moivre

Démonstration par récurrence

Proposition qui dépend de $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq m$ fixé, $m \in \mathbb{N}$) $P(n)$

Initialisation: (1) Démontrer que $P(n)$ est vraie pour $n = m$

Hérédité (2) Démontrer que $P(n)$ implique $P(n+1)$ pour tout $n \geq m$.

$\Rightarrow$ Alors $P(n)$ est vraie pour $n = m \Rightarrow n = m+1 \Rightarrow n = m+2 \Rightarrow \ldots\ldots$ pour tout $n \geq m$.

Initialisation: $n = 1 \Rightarrow \left(\rho e^{i\varphi}\right)^1 = \rho e^{i\varphi} = \rho^1 e^{i\varphi}$ VRAI

Hérédité: Supposons que $P(n)$ est vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$: $\left(\rho e^{i\varphi}\right)^n = \rho^n e^{in\varphi}$

Démontrons que $P(n+1)$ est vraie:

$$\left(\rho e^{i\varphi}\right)^{n+1} = \left(\rho e^{i\varphi}\right)^n \cdot \left(\rho e^{i\varphi}\right) \stackrel{P(n)}{=} \rho^n e^{in\varphi} \cdot \rho e^{i\varphi} = \rho^n \cdot \rho\, e^{in\varphi + i\varphi} = \rho^{n+1} e^{i(n+1)\varphi}$$

VRAI

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$\Rightarrow$ Par récurrence la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ▨