Rappel : L'infimum et le supremum d'un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}$.

Déf.

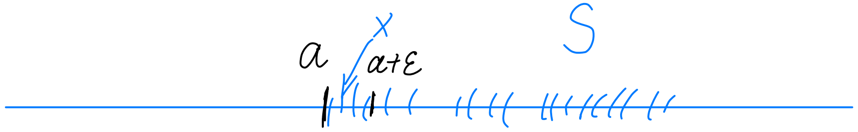
Si $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$ et $a \in \mathbb{R}$ tel que

(1) $a \leq x \quad \forall x \in S$

(2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in S : x - a \leq \varepsilon$

$a \leq x \leq a + \varepsilon$

Alors $a = \inf S$ (la borne inférieure de S)



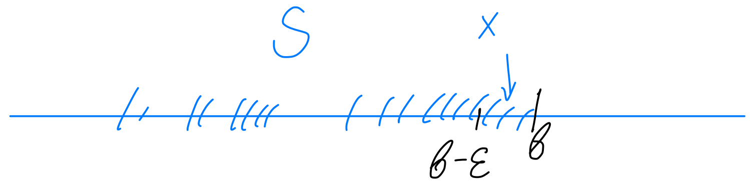
Si $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$ et $b \in \mathbb{R}$ est tel que

(1) $b \geq x \quad \forall x \in S$

(2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in S : b - x \leq \varepsilon$

$b - \varepsilon \leq x \leq b$

Alors $b = \sup S$ (la borne supérieure de S)



Axiome : Tout sous-ensemble non-vide $S \subset \mathbb{R}_+^*$ (réels positifs) admet une borne inférieure.

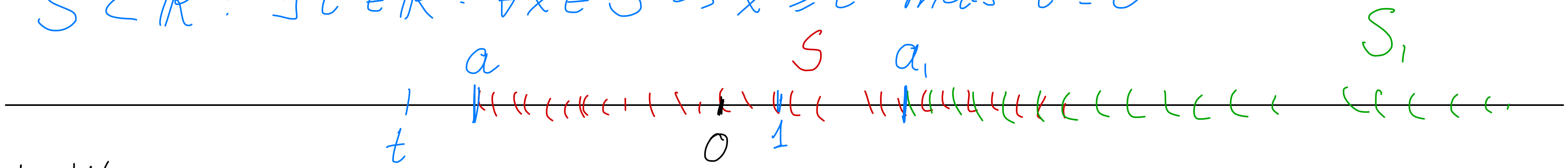
$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

Thm Tout sous-ensemble non-vide majoré $S \subset \mathbb{R}$ admet un supremum qui est unique

Tout sous-ensemble non-vide minoré $S \subset \mathbb{R}$ admet un infimum qui est unique.

Dém: (a) $S \subset \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \Rightarrow$ par l'axiome $\exists a \in \mathbb{R} : a = \inf S$.

(b) $S \subset \mathbb{R} : \exists t \in \mathbb{R} : \forall x \in S \Rightarrow x \geq t$ mais $t \leq 0$



$-t = |t|$

Soit $S_1 = \{x - t + 1,\ x \in S\} \subset \mathbb{R}_+^* \Rightarrow$ Par l'axiome $\exists a_1 = \inf S_1$

Alors $a \overset{\text{déf}}{=} a_1 + t - 1 = \inf S$

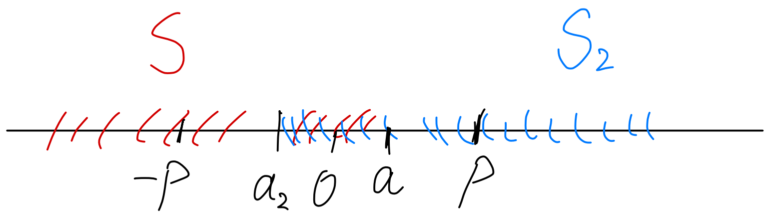
(1) $\forall x \in S \Rightarrow \underbrace{x - t + 1}_{S_1} \geq a_1 \Leftrightarrow x \geq a_1 + t - 1 = a$

(2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists y \in S_1 : y - a_1 \leq \varepsilon$

$\exists x \in S ; y = x - t + 1 \Rightarrow x \underbrace{- t + 1 - a_1}_{-a} = x - a \leq \varepsilon$

(c) $S \subset \mathbb{R} : \exists p \in \mathbb{R} : \forall x \in S \Rightarrow x \leq p$

$\Rightarrow$ Soit $S_2 = \{y \in \mathbb{R} : y = -x,\ x \in S\}$



$\Rightarrow S_2$ est minoré par $-p \Rightarrow$ (b) s'applique $\Rightarrow \exists \inf S_2 = a_2 \Rightarrow a = -a_2 = \sup S$

Unicité Si $\inf S$ existe, alors il est le plus grand minorant de S.
Si $\sup S$ existe, alors il est le plus petit majorant de S.
En particulier, $\inf S$ et $\sup S$ sont uniques (s'ils existent).

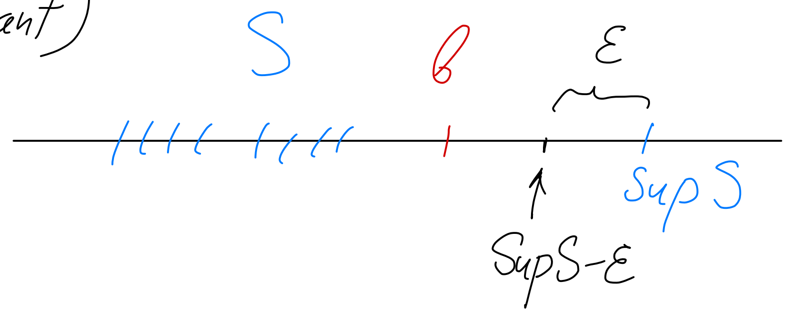
Idée : par absurde. Supposons que S est tel que $\exists \sup S$ et $b \in \mathbb{R}$: b est un majorant de S et $b < \sup S$.

Soit $\varepsilon = \dfrac{\sup S - b}{2} > 0$

$\Rightarrow \sup S - \varepsilon > b \geq x \quad \forall x \in S$ (b est un majorant)

$\Rightarrow \sup S - \varepsilon > x \quad \forall x \in S$

$\Rightarrow \sup S - x > \varepsilon \quad \forall x \in S$



Contradiction avec : $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in S : \sup S - x \leq \varepsilon$.

$\Rightarrow \sup S$ est le plus petit majorant de S. $\Rightarrow$ unique

Le cas de l'infimum est symétrique $\square$

Notation intervalles.

Soit $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Intervalles bornés:

$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} = [a, b]$ intervalle fermé borné

$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} =]a, b[$ intervalle ouvert borné

$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} = [a, b[$ intervalle borné ni ouvert ni fermé

$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} =]a, b]$ — " —

déf: $-\infty < x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ la droite réelle achevée

Intervalles non-bornés:

$\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} = [a, +\infty[$ fermé

$\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} =]-\infty, b]$ fermé

$\{x \in \mathbb{R} : x > a\} =]a, +\infty[$ ouvert

$\{x \in \mathbb{R} : x < b\} =]-\infty, b[$ ouvert

$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[= \{x \geq 0\}$, $\quad \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[= \{x > 0\}$

$\mathbb{R}_- =]-\infty, 0] = \{x \leq 0\}$, $\quad \mathbb{R}_-^* =]-\infty, 0[= \{x < 0\}$

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_-^* \cup \mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$$

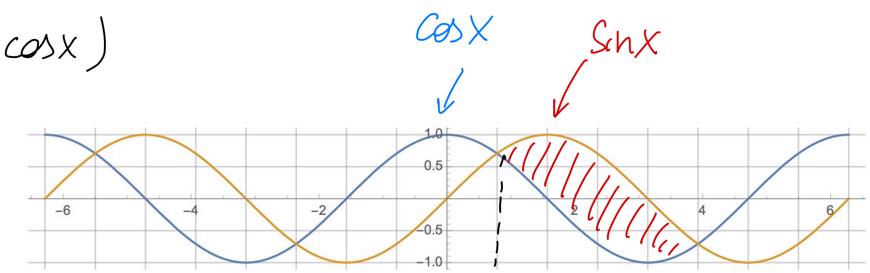
Comment trouver $\sup S$, $\inf S$ pour un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}$ donné ?

Exemples (1) Intervalles bornés. $\sup\,]a, b] = b$ $\quad b \in]a,b]$

$\inf\,]a,b] = a$ $\quad ; \quad a \notin]a,b]$

(2) $S = \{ \underset{x>0}{x \in \mathbb{R}_+^*} : \sin x > \cos x \}$. $\operatorname{Inf} S$? $\operatorname{Sup} S$?

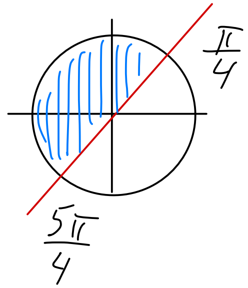
Si $\sin x = \cos x$, $x > 0$ alors $\cos x \neq 0$ (sinon $\sin x \neq \cos x$)



$\Rightarrow \tan x = 1$

il faut trouver le plus petit $x > 0$ tel que $\tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \inf S = \frac{\pi}{4}$ $\quad ; \quad \inf S \notin S$.



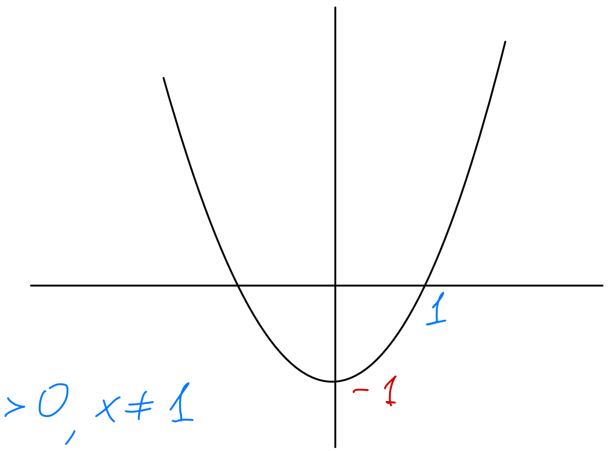
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 1 > \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ S n'est pas majoré $\Rightarrow$ $\sup S$ n'existe pas.

Question 3.

Soit $S = \{x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \ : \ \frac{1}{x^2-1} < 1\}$.

$f(x) = x^2 - 1$



$x \in \mathbb{R}_+^* : x > 0$.

Alors :

A. $\operatorname{Sup} S = 1$

B. $\operatorname{Inf} S = 0$

C. S n'est pas minoré

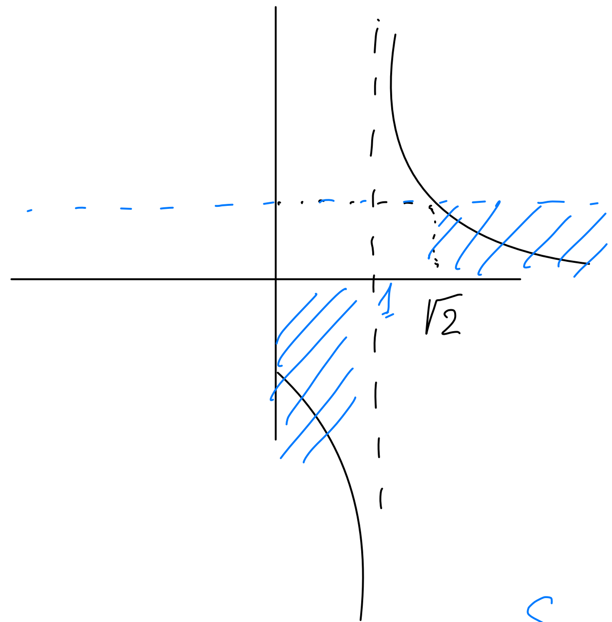
D. $\operatorname{Sup} S = \sqrt{2}$

E. $\operatorname{Inf} S = \sqrt{2}$

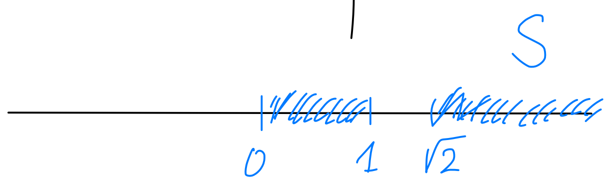
$\frac{1}{x^2-1} = 1$, $x > 0$, $x \neq 1$

$1 = x^2 - 1$

$x = \sqrt{2}$



$S =]0,1[\ \cup \ ]\sqrt{2}, +\infty[$



$\inf S = 0$, S n'est pas majoré

Thm. Propriété d'Archimède Pour tout couple (x,y) de nombres réels tel que $x>0$ et $y\geq 0$ il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $nx>y$.

Dém: (1) $\mathbb{N}$ n'est pas majoré. $\mathbb{N}\subset\mathbb{R}$. Par absurde : supposons que $\mathbb{N}$ est majoré

$\Rightarrow \exists x\in\mathbb{R} : x=\sup\mathbb{N} \Rightarrow$ pour $\varepsilon=\frac{1}{2}$ $\exists n\in\mathbb{N} : x-n\leq\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\underset{\sup\mathbb{N}}{x}\leq n+\frac{1}{2} < \underbrace{n+1}_{m}\in\mathbb{N} \Rightarrow \underset{\in\mathbb{N}}{m}>\sup\mathbb{N}$ absurde $\Rightarrow \mathbb{N}$ n'est pas majoré dans $\mathbb{R}$.

(2) Soit $\frac{y}{x}\in\mathbb{R}_+$ alors $\exists n\in\mathbb{N} : n>\frac{y}{x} \underset{x>0}{\Leftrightarrow} nx>y$ $\blacksquare$

Donc $\mathbb{R}$ est un corps archimédien

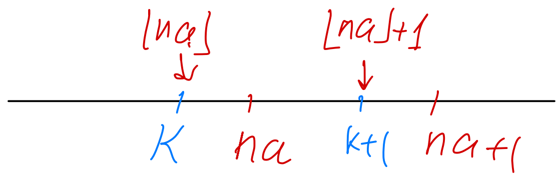
Thm $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Pour tout couple $a,b : a<b\in\mathbb{R}$ il existe un nombre rationnel $r\in\mathbb{Q} : a<r<b$.

Dém: Par la propriété d'Archimède : $\exists n\in\mathbb{N}^* : n(b-a)>1 \Rightarrow b-a>\frac{1}{n}$

$$\Rightarrow a<a+\frac{1}{n}<b \Leftrightarrow \frac{na}{n}<\frac{na+1}{n}<b$$

$$a=\frac{na}{n}<\frac{\lfloor na\rfloor+1}{n}\leq\frac{na+1}{n}=a+\frac{1}{n}<b$$

$$\Rightarrow r=\frac{\lfloor na\rfloor+1}{n}\in\mathbb{Q} \quad \text{et} \quad a<r<b$$



$\lfloor na\rfloor\leq na<\lfloor na\rfloor+1$

partie entière

$\blacksquare$

Exercice: Soient $r<q$ $r,q\in\mathbb{Q}$. Alors il existe $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$: $r<x<q$.
irrationnel

($\Rightarrow$ $\forall x<y, x,y\in\mathbb{R}$ $\exists z\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$: $x<z<y$) [DZ §1.3.7]

Ex (3) $S=\{x>a\}=\,]a,+\infty[$: $\exists \inf S=a$; $\sup S$ n'existe pas.

Ex (4) $S=\{x\in\mathbb{Q} : x>0$ et $2\le x^2\le 9\}\subset\mathbb{R}$

Exercice: $0\le a\le b \Leftrightarrow a^2\le b^2$ (à partir de si $x\geq 0, y\geq 0 \Rightarrow x\cdot y\geq 0$)

$\sup S=3$ (1) $x^2\le 9 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x\le 3$, $x>0$ Vrai

(2) Soit $\varepsilon>0 \Rightarrow x=3\in S$; $\sup S-x=3-3=0<\varepsilon$ $\forall\varepsilon>0$ Vrai

$\inf S=\sqrt{2}$ (1) $x^2\geq 2 \underset{x>0}{\Longleftrightarrow} x\geq\sqrt{2}$ Vrai

(2) Soit $\varepsilon>0$. Il faut trouver $x\in S$: $\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}+\varepsilon$

Par le thm de densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ il existe $q\in\mathbb{Q}$: $\sqrt{2}<q<\sqrt{2}+\varepsilon$

Soit $x=\min(q,3) \Rightarrow x\in S$ et $\sqrt{2}<x<\sqrt{2}+\varepsilon$ Vrai $\Rightarrow \inf S=\sqrt{2}$.

Remarque. Ça montre aussi que le corps $\mathbb{Q}$ ne satisfait pas l'axiome de la borne inférieure.

Remarque Si $\inf S \in S$, on dit que S possède un minimum
$\min S = \inf S$ dans ce cas.

Si $\sup S \in S$, on dit que S possède un maximum,
$\max S = \sup S$ dans ce cas.

Ex 4 : $\max S = \sup S = 3$ $\quad \inf S = \sqrt{2} \notin S \Rightarrow S$ n'a pas de minimum