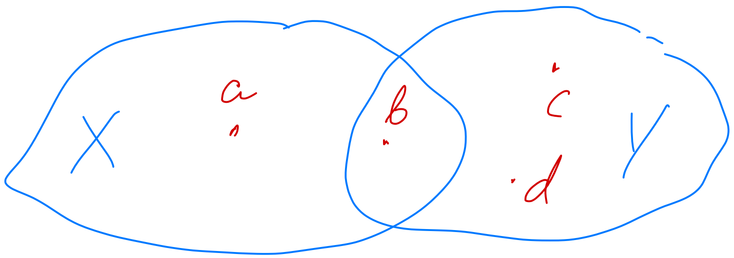
Chapitre 1. Nombres réels.

§1.1. Ensembles.

Ensemble = „Collection des objets définis et distincts" G. Cantor

Remarque. Dans ce cours on considère seulement des elements d'un ensemble universel bien défini, par exemple les nombres. (Zermelo)

Rappel sur les ensembles. On suppose que les ensembles considérés contient que des éléments d'un ensemble universel $\mathcal{U}$



$a \in X$ appartient

$a \notin Y$ n'appartient pas

$\forall \longleftrightarrow$ pour tout $\qquad \exists \longleftrightarrow$ il existe

<u>Déf</u> $X \subset Y$ X est un sous-ensemble de Y

sous-ensemble $\forall b \in X \Rightarrow b \in Y$

$\Rightarrow$ implique

$X \not\subset Y$ n'est pas un sous-ensemble

<u>Négation</u> : $\exists a \in X$ et $a \notin Y$

<u>Déf</u> $X = Y \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} Y \subset X$ <u>et</u> $X \subset Y$

<u>Négation</u> : $X \neq Y \Longleftrightarrow X \not\subset Y$ <u>ou</u> $Y \not\subset X$

si et seulement si

$\emptyset$ ensemble vide : $\emptyset = \{\ \}$

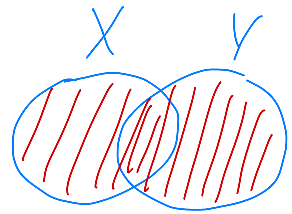
$\Rightarrow \emptyset \subset X \quad \forall X$

$X \subset X \quad \forall X$

Opérations ensemblistes.

Soient $X, Y, Z \subset$ ensemble universel $\mathcal{U}$

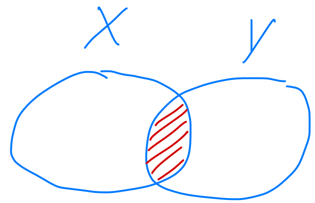
(1) Réunion : $X \cup Y \overset{\text{déf}}{=} \{a \in \mathcal{U} : a \in X$ ou $a \in Y\}$



$$f \notin X \cup Y \iff \{f \in \mathcal{U} : f \notin X \text{ et } f \notin Y\}$$

$X \cup Y = Y \cup X$

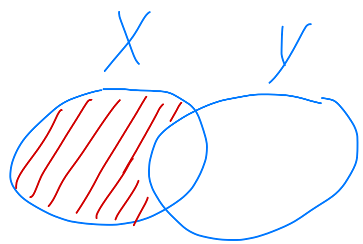
(2) Intersection $X \cap Y \overset{\text{déf}}{=} \{a \in \mathcal{U} : a \in X \text{ et } a \in Y\}$



$$f \notin X \cap Y \iff \{f \in \mathcal{U} : f \notin X \text{ ou } f \notin Y\}$$

$X \cap Y = Y \cap X$

(3) Différence $X \setminus Y \overset{\text{déf}}{=} \{a \in \mathcal{U} : a \in X \text{ et } a \notin Y\}$



$$f \notin X \setminus Y \iff \{f \in \mathcal{U} : f \notin X \text{ ou } f \in Y\}$$

$X \setminus Y \neq Y \setminus X$

en général

Exemple. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

Dém: $x \in \mathcal{U}$ tel que $x \in B \setminus C \Leftrightarrow \{x \in \mathcal{U} : x \in B \text{ et } x \notin C\}$

$x \notin B \setminus C \Leftrightarrow \{x \in \mathcal{U} : x \notin B \text{ ou } x \in C\}$

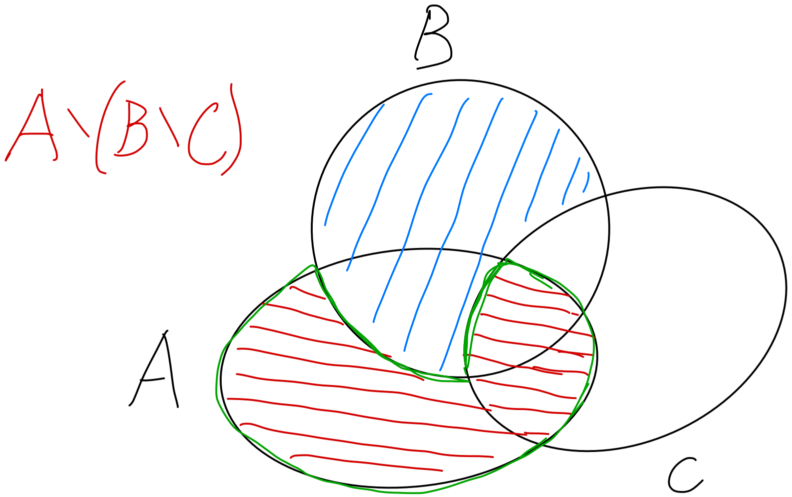
$$x \in A \setminus (B \setminus C) \Leftrightarrow \{x \in \mathcal{U} : x \in A \text{ et } x \notin (B \setminus C)\} =$$

$$= \{x \in \mathcal{U} : x \in A \text{ et } (x \notin B \text{ ou } x \in C)\} =$$

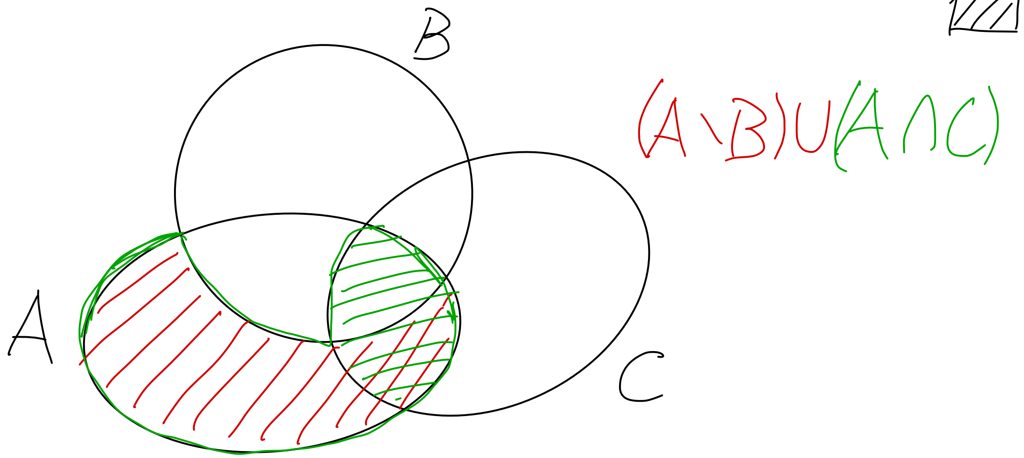
$$= \{x \in \mathcal{U} : \underbrace{(x \in A \text{ et } x \notin B)}_{\text{déf de } A \setminus B} \text{ ou } \underbrace{(x \in A \text{ et } x \in C)}_{\text{déf de } A \cap C}\} =$$

$$= \{x \in \mathcal{U} : x \in A \setminus B\} \cup \{x \in \mathcal{U} : x \in A \cap C\} = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

$\blacksquare$



$=$

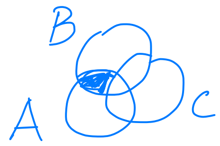


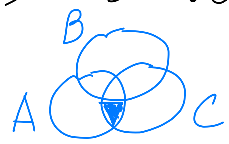
Question 2

Soient A, B, C trois sous-ensembles de U. Alors

partie gauche   partie droite

1. $(A \cap B) \setminus C = (A \cap C) \setminus B$

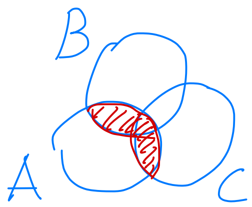


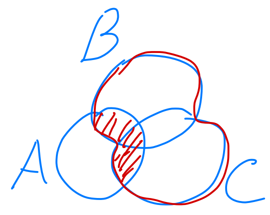


$x \in A, x \in C, x \notin B \Rightarrow x \notin p.g., x \in p.d.$

2. $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$ $x \in A, x \in C \Rightarrow x \in p.g., x \notin p.d.$

3. $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$





4. $(A \cap B) \cup C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $x \in C, x \notin A, x \notin B \Rightarrow x \in p.g., x \notin p.d.$

5. $(A \setminus B) \cup C = (C \setminus B) \cup A$ $x \in A, x \in B, x \notin C \Rightarrow x \notin p.g., x \in p.d.$

$(x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C)$
$= (x \in A) \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C)$

similaire à

$xy + xz = x(y+z)$

Nombres naturels, rationnels, réels

Les nombres naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ avec „+" et „$\cdot$"
et la relation d'ordre : on dit que $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N} : a + c = b$.

Propriété de bon ordre: Tout sous-ensemble non-vide de $\mathbb{N}$ contient un plus petit élément.

Propriété de récurrence : Soit $S \subset \mathbb{N}$ tel que
(1) $0 \in S$
(2) Si $n \in S \Rightarrow n+1 \in S$
} Alors $S = \mathbb{N}$

soustraction

Les entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

$\forall x \in \mathbb{Z}$ possède un élément opposé par rapport à l'addition :
$\forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0$; $y = -x$ notation

division

Les nombres rationnels: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\} \Big/ \left(\frac{p}{q} = \frac{t}{s} \text{ si } p \cdot s = t \cdot q\right)$

$\forall x \in \mathbb{Q} : x \neq 0 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{Q} : x \cdot y = 1$

y est le réciproque de x. Notation: $\frac{1}{x} = y$.

Nombres réels $\mathbb{R}$

solutions des équations algébriques et nombres transcendants

$\mathbb{R}$ - réels

Proposition Soit x : $x^2 = 2$, $x > 0$

Alors $x \notin \mathbb{Q}$.

Dém: par absurde : Supposons que $x = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ tel que q est minimal possible (on utilise ici la propriété de bon ordre)

Alors: $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ est pair $\Rightarrow p$ est pair

[Si $p = 2k+1 \Rightarrow p^2 = 4k^2 + 4k + 1$ est impair]

$\Rightarrow p = 2m \Rightarrow 2q^2 = p^2 = (2m)^2 = 4m^2 \Rightarrow q^2 = 2m^2 \Rightarrow q^2$ est pair

$\Rightarrow q$ est pair $\Rightarrow q = 2n > 0$

$\Rightarrow x = \frac{p}{q} = \frac{2m}{2n} = \frac{m}{n}$ où $0 < n < q$ contradiction

$\Rightarrow x$ ne peut pas être de la forme $\frac{p}{q}$ ▨

Définition axiomatique de $\mathbb{R}$.

$\boxed{(1)}$ $\mathbb{R}$ est un corps : ensemble avec $+, \cdot$ satisfaisant les axiome suivants

commutatif $\quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$:

(·) $(x+y)+z = x+(y+z)$

(·) $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$

(·) $x+y = y+x$

(·) $x\cdot y = y\cdot x$

(·) $\exists\, 0 \in \mathbb{R} : x+0 = x$

(·) $\exists\, 1 \in \mathbb{R} : 1 \neq 0$ et $x\cdot 1 = x$

(·) $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists y \in \mathbb{R} : x+y = 0$

(·) $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, \exists y \in \mathbb{R} : x\cdot y = 1$

(·) $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$

$\boxed{(2)}$ $\mathbb{R}$ est un corps ordonné. $\exists$ une rélation d'ordre $\leq$ tel que pour tout couple d'éléments $x, y \in \mathbb{R}$ on a

(·) $x \leq y$ ou $y \leq x$ et si $x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y$

(·) $x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

(·) Si $x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z \quad \forall z \in \mathbb{R}$

(·) Si $x \geq 0$ et $y \geq 0 \Rightarrow x\cdot y \geq 0$

Notations:

Si $x \leq y$ et $x \neq y \Rightarrow x < y$

Si $x \geq y$ et $x \neq y \Rightarrow x > y$.

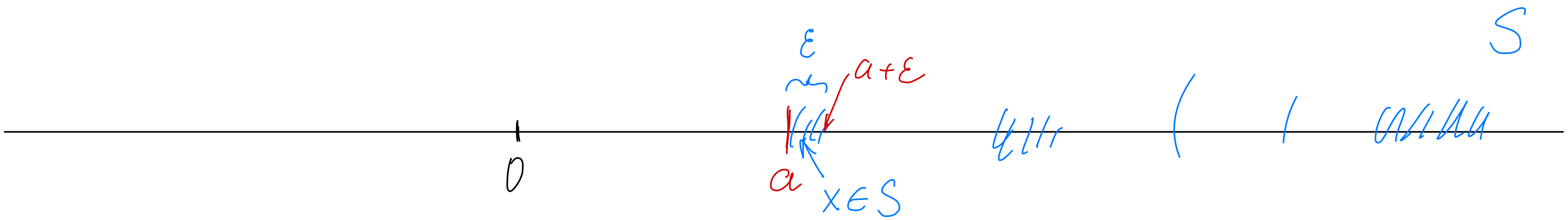
$\boxed{3}$ $\mathbb{R}$ est un corps complet : $\mathbb{R}$ satisfait

Axiome de la borne inférieure

Pour tout sous-ensemble S non-vide de $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ il existe un nombre $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ tel que

(1) $a \leq x \quad \forall x \in S$

(2) Quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe un élément $x \in S$ tel que $x \leq a + \varepsilon \quad (\Leftrightarrow x - a \leq \varepsilon)$



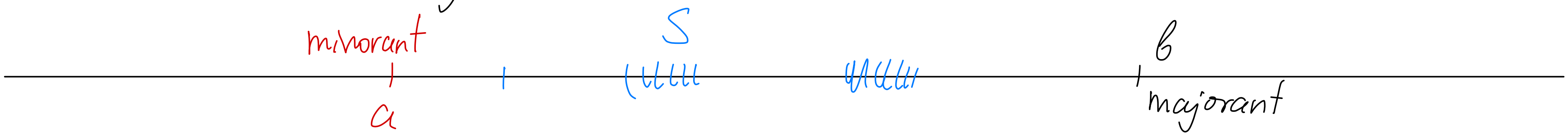
Si les axiomes $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ sont satisfaites, alors on obtient un corps commutatif, ordonné et complet. Se sont les axiomes des nombres réels $\mathbb{R}$.

Borne inférieure et supérieure.

Déf Soit $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$. Alors $a \in \mathbb{R}$ ($b \in \mathbb{R}$) est un minorant (un majorant) de S si $\forall x \in S$ on a $a \leq x$ ($x \leq b$).

Si S admet un minorant (un majorant) alors S est minoré (majoré).

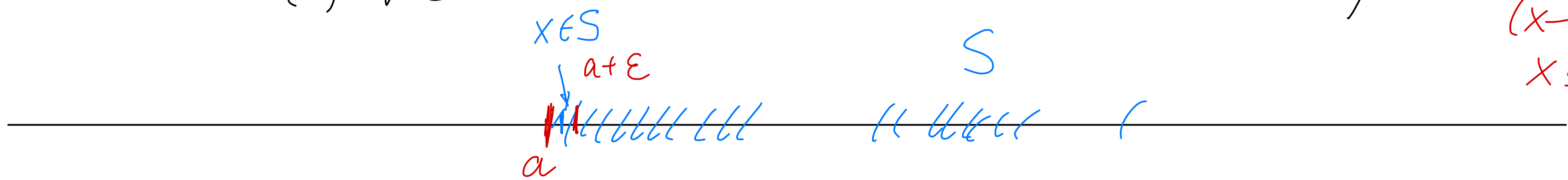
Si S est majoré et minoré, alors S est borné.



Déf Soit S un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$. Un nombre réel b (resp. a) vérifiant les propriétés suivantes :

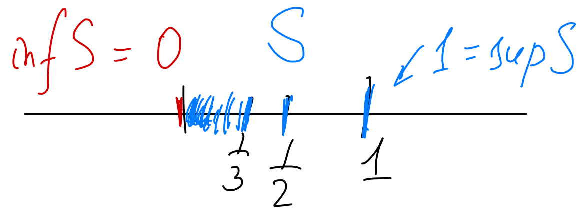
(1) $\forall x \in S$ $\quad x \leq b$ $\quad (x \geq a)$

(2) $\forall \varepsilon > 0$ il existe un élément $x \in S$ tel que $\quad b - x \leq \varepsilon$
$(x - a) \leq \varepsilon$
$x \leq a + \varepsilon$



est le $\left[\begin{array}{cc} \text{supremum (borne supérieure)} & \text{infimum (borne inférieure)} \\ b = \sup S & a = \inf S \end{array} \right]$ de S.

Ex $S = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}^* \overset{\text{déf}}{=} \{1, 2, \dots\}}$ $\quad S \subset \mathbb{R}$



(1) $1 = \sup S$ $\quad$ (1) $1 \geq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ Vrai

(2) Soit $\varepsilon > 0$ Trouver $x \in S$: $1 - x \leq \varepsilon$

On peut prendre $x = 1 \in S \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ on a : $1 - 1 = 0 < \varepsilon$ Vrai

$\Rightarrow 1 = \sup S$

(2) $0 = \inf S$. $\quad$ (1) $0 \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ Vrai

(2) Soit $\varepsilon > 0$. Trouver $x \in S$: $x - 0 \leq \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ trouver $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$

On prend $\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 = n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon > \frac{1}{n} \in S$

partie entière

$\Rightarrow x = \frac{1}{n}$ avec $n = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ satisfait la condition

Vrai

$\Rightarrow 0 = \inf S$. $\blacksquare$