Analyse I : résumé du cours

On a étudié les sujets suivants :
- nombres réels (inf-sup), nombres complexes
- suites numériques (a_n)
- série numériques Σa_n
- fonctions réelles
- limites des fonctions
- dérivées des fonctions
- développements limités
- séries entières, séries de Taylor
- intégrales des fonctions continues sur $[a,b]$
- intégrales generalisées

Les sujets sont liés.

1 Limites des suites $\Longleftarrow$ Limites des fonctions $\lim f(a_n) = \ell \quad \forall (a_n) : \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(1) Si $\lim_{x\to 0+} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \ell$ (Par contre $\exists$ des fonctions telles que $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ $\lim f\left(\frac{1}{n}\right) = \ell$, maix $\lim_{x\to 0+} f(x)$ n'existe pas)

(2) Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(n) = \ell$ (Par contre. $\exists$ des fonctions telles que $\lim_{n\to\infty} f(n) = \ell$, mais $\lim_{x\to\infty} f(x)$ n'existe pas)

Ex $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}+3}{\sqrt{n}+1}\right)^{2\sqrt{n}}$ $\quad 1^{\infty}$ $\quad \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}=e$ où $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

(1) directement $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}+1+2}{\sqrt{n}+1}\right)^{2\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}+1}\right)^{\frac{\sqrt{n}+1}{2}}}_{\to e}{}^{\cdot\underbrace{\frac{2}{\sqrt{n}+1}\cdot 2\sqrt{n}}_{\to 4}}=e^{4}$

(2) $x=\frac{1}{\sqrt{n}}$: $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{1+3x}{1+x}\right)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{1+x+2x}{1+x}\right)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0+}\left(1+\frac{2x}{1+x}\right)^{\frac{2}{x}}$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{2}{x}\ln\left(1+\frac{2x}{1+x}\right)=\lim_{x\to 0+}\frac{2}{x}\left(\frac{2x}{1+x}+\left(\frac{2x}{1+x}\right)\underbrace{\varepsilon(x)}_{\to 0}\right)=4\Rightarrow\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+3x}{1+x}\right)^{\frac{2}{x}}=e^{4}$$

$\ln(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+y^3\varepsilon(y)$

Ex. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln(1+3x))^3}{x(1-\cos 3x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(3x+3x\,\varepsilon(x))^3}{x\left(\frac{(3x)^2}{2}+x^2\varepsilon(x)\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{27x^3+x^3\varepsilon(x)}{\frac{9x^2}{2}\cdot x+x^3\varepsilon(x)}=6.$

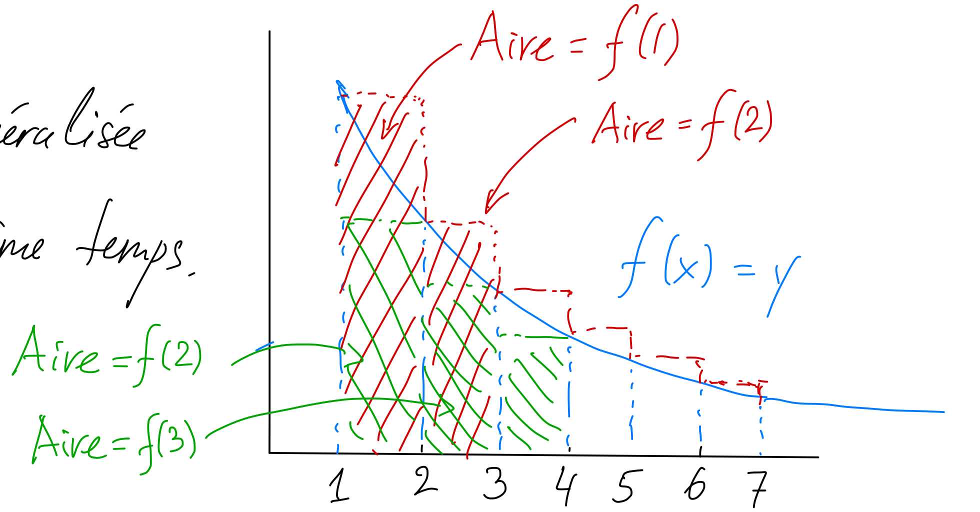
$\ln(1+3x)=3x+3x\,\varepsilon(x)$

$\cos(3x)=1-\frac{(3x)^2}{2}+x^2\varepsilon(x)$

2 Séries numeriques $\longleftrightarrow$ Intégrales généralisées

Proposition. Soit $f \geq 0$ une fonction continue et strictement decroissante pour tout $x \geq a$ pour un certain $a \geq 1$.
Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ et l'intégrale généralisée $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ convergent ou divergent en même temps.

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$



$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ = somme des aires des rectangles rouges

Ex. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge $\Leftrightarrow p > 1 \Longleftrightarrow$ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ converge $\Leftrightarrow p > 1$

difficile Proposition facile

Ex. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n + c)}$ Existe-il la valeur de $c > 0$ pour laquelle la série converge ?

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x + c)} = \int_0^{\infty} \frac{du}{u+c} = \lim_{R\to\infty} \int_0^{R} \frac{du}{u+c} = \lim_{R\to\infty} \ln|u+c| \Big|_0^R = \lim_{R\to\infty} \left(\ln(R+c) - \ln c\right) = \infty$$

$u = \ln x$, $du = \frac{1}{x}dx$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n + c)}$ diverge pour tout $c > 0$.

3 Rappel rapide:

Continuité - dérivabilité :

$$f(x) = \begin{cases} h(x), & x \geq 0 \\ g(x), & x < 0 \end{cases}$$ continuité? dérivabilité?

(1) Continuité : $\lim_{x \to 0+} h(x)$, $\lim_{x \to 0-} g(x)$ existent ? $\lim_{x \to 0+} h(x) \overset{?}{=} \lim_{x \to 0-} g(x)$

(2) Dérivabilité $f_d'(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{h(x)-h(0)}{x}$ existe? $f_g'(0) = \lim_{x \to 0-} \frac{g(x)-g(0)}{x}$ existe? $f_d'(0) \overset{?}{=} f_g'(0)$

Suites: (1) utiliser les limites remarquables $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, $\lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(2) liminf, limsup. $\lim_{n \to \infty} a_n = 5$; $\liminf_{n \to \infty} (-1)^n a_n = -5$ $\limsup_{n \to \infty} (-1)^n a_n = 5$

(3) suites définies par récurrence Equation pour la limite: $\ell = g(\ell)$.

Methode: $a_{n+1} = g(a_n)$, $g \uparrow \Rightarrow (a_n)$ monotone, Si $(a_n) \uparrow \Rightarrow$ démontrer majoration
$(a_n) \downarrow \Rightarrow$ démontrer minoration

Séries: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (1) $\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \begin{matrix} <1 \text{ conv} \\ >1 \text{ div} \end{matrix}$ (2) $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho \begin{matrix} <1 \text{ conv} \\ >1 \text{ div} \end{matrix}$ (3) Comparaison

Condition nécessaire de convergence : $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

(4) Leibnitz : (1) alternée
(2) $|a_{n+1}| \leq |a_n|$
(3) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

(5) Intégrale. $\int_1^{\infty} f(x)\,dx \longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$
$f(x) \geq 0$, $\downarrow$ strictement

4 TVI, TAF

TVI : Une fonction continue sur un intervalle fermé borné atteint son min, max et toute valeur entre les deux

TAF : Pour une fonction f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

<u>Ex</u> Soit $f(x) = \begin{cases} (1-x)^{1-x}, & x \in [0,1[\\ 1, & x = 1 \end{cases}$. Est-elle continue sur $[0,1]$? Trouver l'ensemble image $f([0,1])$.

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)^{1-x} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} (1-x)\ln(1-x) \underset{y=1-x}{=} \lim_{y\to 0^+} y\ln y \underset{t=\frac{1}{y}}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}(-\ln t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} \overset{BL}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} (1-x)^{1-x} = 1 \Rightarrow f(x) \text{ est continue sur } [0,1]. \quad f(0)=1,\ f(1)=1$$

TVI $\Rightarrow \exists$ min et max de $f(x)$ sur $[0,1]$ $\Rightarrow$ Points stationnaire ?

$$f(x) = e^{\ln(1-x)^{1-x}} = e^{(1-x)\ln(1-x)} \Rightarrow f'(x) = \underbrace{e^{(1-x)\ln(1-x)}}_{\neq 0}\left(-\ln(1-x) + \frac{1-x}{1-x}(-1)\right) \overset{?}{=} 0$$

$$-\ln(1-x) - 1 = 0 \Rightarrow \ln(1-x) = -1 \Rightarrow 1-x = e^{-1} \Rightarrow x = 1-e^{-1} \in]0,1[$$

$$f(1-e^{-1}) = (e^{-1})^{(e^{-1})} = e^{-\frac{1}{e}} < 1 \ ; \quad f'(x) : \begin{array}{l} -\ln(1-x)-1 < 0 \text{ si } x \text{ proche à } 0 \\ -\ln(1-x)-1 > 0 \text{ si } x \text{ proche à } 1 \end{array}$$

$\rightarrow$ min loc

$\Rightarrow$ l'ensemble image $f([0,1]) = [e^{-\frac{1}{e}}, 1]$.

Soit $c \in]\underset{[0,1]}{\min} f, \underset{[0,1]}{\max} f[$. Combien de solution y a-t-il de l'équation $f(x) = c$ sur $[0,1]$?

($\min f = e^{-\frac{1}{e}}$, $\max f = 1$)

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 > c \\ f(1-e^{-1}) = e^{-\frac{1}{e}} < c \\ f(1) = 1 > c \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Par le TVI } \exists \text{ au moins 2 solutions de } f(x) = c \text{ sur }]0,1[.$$

Supposons $f(t) = f(s) = f(q) = c$, $t < s < q \in]0,1[$ f est dérivable sur $]0,1[$

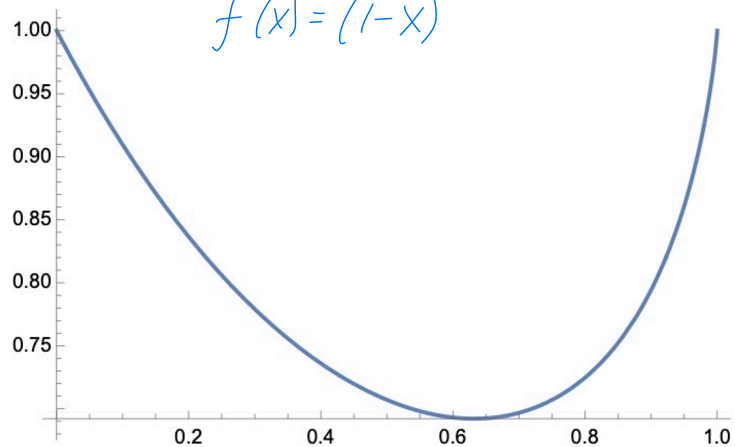
$\Rightarrow$ Par TAF $\exists\, a \in]t,s[$ et $b \in]s,q[$: $f'(a) = 0$ et $f'(b) = 0$ $a \neq b$

Mais $f'(x) = 0$ a une seule solution sur $]0,1[$

$\Rightarrow$ $\exists$ au plus 2 solutions de $f(x) = c$

Finalement, il existe exactement 2 solutions de $f(x) = c$ sur $]0,1[$.

$f(x) = (1-x)^{1-x}$



5 Croissance relative des fonctions

Q: Parmi les limites suivantes, lesquelles sont égales à zéro?

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ a>1,\ \alpha>0}} \frac{x^\alpha}{a^x} \overset{BL}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^x \ln a} = \dots = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)x^{\overbrace{\alpha-k}^{\leq 0}}}{\underbrace{a^x(\ln a)^k}_{\to\infty}} = 0$

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ \alpha>0}} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\underbrace{\alpha x^\alpha}_{\to\infty}} = 0$

Ex: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \longleftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} \rightsquigarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln x = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+ \\ \alpha>0}} x^\alpha \cdot \ln x = \lim\limits_{y\to\infty} \frac{1}{y^\alpha}(-\ln y) = -\lim\limits_{y\to\infty} \frac{\ln y}{y^\alpha} \overset{(2)}{=} 0$

$y = \frac{1}{x}$

L'hierarchie de croissance des fonctions.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^\alpha}{a^x} = 0$, $\alpha>0, a>1$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

(3) $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha \ln x = 0$, $\alpha>0$

Notation: $\succ$ = croit plus vite

Soit $k\in\mathbb{N}^* \Rightarrow x^{\frac{\alpha}{k}} \succ \ln x \Rightarrow x^\alpha \succ (\ln x)^k$

$\alpha>0 \Rightarrow \frac{\alpha}{k}>0$

$$\boxed{a^x \succ x^\alpha \quad a>1 \quad \alpha>0} \qquad \boxed{x^\alpha \succ (\ln x)^k}$$

lorsque $x \to +\infty$

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

$a>1$

D'Alembert: $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ conv. abs.

$\Rightarrow$ critère necessaire : $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$

$$\boxed{n! \succ a^n \quad a>1,\ n\to\infty}$$

(5) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

D'Alembert: $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\, n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ conv. abs. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$

$$\boxed{n^n \succ n! \quad n\to\infty}$$

Alors on a l'hiérarchie des croissances :

$$n^n \succ n! \succ a^n \succ n^p \succ (\ln n)^q$$

$$\begin{array}{ccccc} & & \wr & \wr & \wr \\ & & a^x \succ & x^p \succ & (\ln x)^q \end{array}$$

$a > 1$
$p > 0$
$q > 0$

lorsque $n \to +\infty$
$x \to +\infty$

$*$: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

6 Classes de régularité des fonctions.

Analytique $\iff$ $f(x)$ = sa série de Taylor sur I (ouvert).

$\Downarrow$

Infiniment dérivable $\iff$ $f(x) \in C^\infty(I)$ lisse

$\Downarrow$

n fois continûment dérivable $\iff$ $f \in C^n(I)$
$n \geq 2$

$\Downarrow$

$n \geq 2$ n fois dérivable $\iff$ $f^{(n)}(x)$ existe sur I

$\Downarrow$

Dérivable $\iff$ $f'(x)$ existe sur I

$\Downarrow$

Continue $\iff$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ $\forall a \in I$

$\Downarrow$

Intégrable sur $[a,b] \subset I$ $\iff$ $\int_a^b f(x)\,dx$ existe
(y compris les intégrales généralisées)

TAF : $\exists t \in]x,y[\subset I$:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(t)$$

TVI : $[a,b] \subset I \Rightarrow$

$$f([a,b]) = [\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f].$$

Thm de la moyenne

$$\exists c \in [a,b] \subset I \text{ t.q. } \int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$$

„Il y a plus de choses sur la terre et dans le ciel, qu'il n'en est rêvé dans votre philosophie"

W. Shakespeare.

la primitive ne s'exprime pas en fonctions élémentaires

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{3}}{\frac{x}{3}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{3}}{\frac{x}{3}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{5}}{\frac{x}{5}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{3}}{\frac{x}{3}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{5}}{\frac{x}{5}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{7}}{\frac{x}{7}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{3}}{\frac{x}{3}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{5}}{\frac{x}{5}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{7}}{\frac{x}{7}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{9}}{\frac{x}{9}} = \frac{\pi}{2}$$

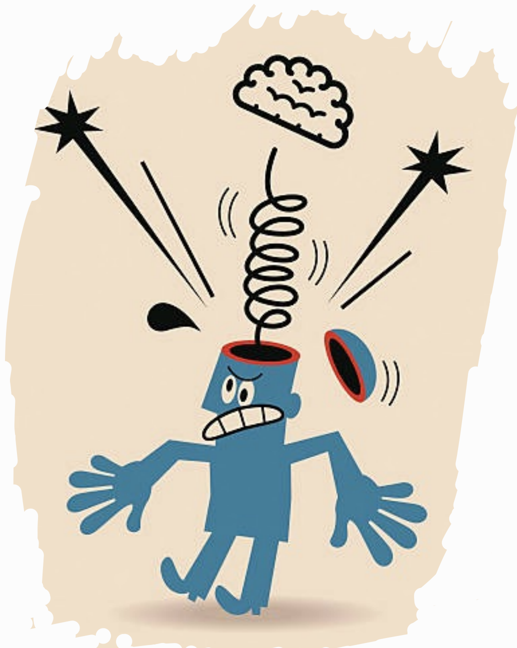
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{3}}{\frac{x}{3}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{5}}{\frac{x}{5}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{7}}{\frac{x}{7}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{9}}{\frac{x}{9}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{11}}{\frac{x}{11}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{3}}{\frac{x}{3}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{5}}{\frac{x}{5}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{7}}{\frac{x}{7}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{9}}{\frac{x}{9}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{11}}{\frac{x}{11}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{13}}{\frac{x}{13}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{3}}{\frac{x}{3}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{5}}{\frac{x}{5}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{7}}{\frac{x}{7}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{9}}{\frac{x}{9}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{11}}{\frac{x}{11}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{13}}{\frac{x}{13}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{15}}{\frac{x}{15}} =$$

$$\frac{467807924713440738696537864469\pi}{935615849440640907310521750000} \approx 0.9999999999852937186\frac{\pi}{2}$$

Vraiment ??!!!



Examen final: Lundi le 12 janvier 2026

$9^{15} - 12^{45}$

Salle STCC Campus

différentiable = dérivable, Sup = sup, Inf = inf, ∃ = il existe, ∀ = pour tout.

Sujets.

(1) Nombres réels, inf-sup.

(2) Nombres complexes

(3) Methode de récurrence

(4) Limites des suites (y compris les suites definies par recurrence; ainsi que liminf, limsup)

(5) Séries numeriques: critères de convergence

(6) Limites des fonctions (par déf, à partir des suites, avec BH, DL)

(7) Continuité, prolongement par continuité, limites à gauche et à droite

(8) TVI

(9) Dérivée d'une fonction, fonction différentiable à gauche et à droite
y compris la dérivée logarithmique, dérivée d'une fonction réciproque.

(10) TAF, propriétés des fonctions différentiables sur un intervalle

(11) DL

(12) Formule de Taylor et série de Taylor.

(13) Séries entières, rayon et domaine de convergence

(14) Intégrale et primitive, Théorème de la moyenne

(15) Changement de variable, intégration par parties; décomposition en simples fractions

(16) Intégrales généralisées, critères de convergence.

Comment réussir son examen.

(1) Lire et mémoriser les résumés

Ed discussion en janvier

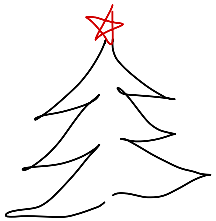
(2-3) Relire les notes du cours

Faire examen 2022 + série questions ouvertes (par exemple)

(4) Relire les séries d'exercices.

(5) Faire examens 2017-2024 (quelques uns)

(6) Relire les résumés !!



Joyeuses fêtes !