Chapitre 8. Intégrales généralisées.

Intégrales généralisées sur un intervalle borné.

Déf Soit $a < b$ et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors on définit l'intégrale généralisée par la limite

$$\int_a^{b-} f(t)\,dt \overset{\text{déf}}{=} \lim_{x \to b-} \int_a^x f(t)\,dt \text{ si la limite existe } \in \mathbb{R}$$

Sinon, l'intégrale généralisée $\int_a^{b-} f(t)\,dt$ est divergente.

Notations

Si $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, on définit l'intégrale généralisée par la limite

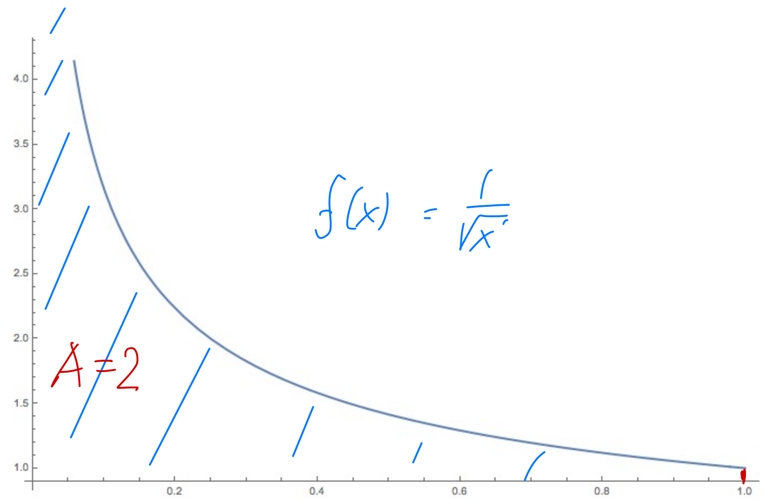
$$\int_{a+}^{b} f(t)\,dt \overset{\text{déf}}{=} \lim_{x \to a+} \int_x^b f(t)\,dt \text{ si la limite existe } \in \mathbb{R}$$

Sinon, l'intégrale généralisée $\int_{a+}^{b} f(t)\,dt$ est divergente.

Ex 1. L'aire sous la courbe $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in]0,1]$

$$\int_{0+}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0+} \int_t^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{t\to 0+}\left(2x^{\frac{1}{2}}\Big|_t^1\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0+} 2(1-\sqrt{t}) = 2$$

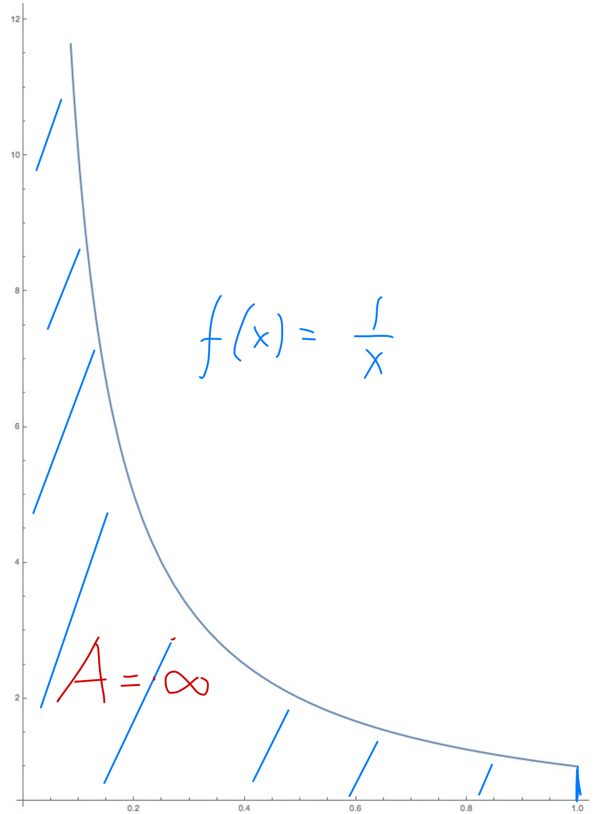


Ex 2. L'aire sous la courbe $y=\frac{1}{x}$, $x\in]0,1]$

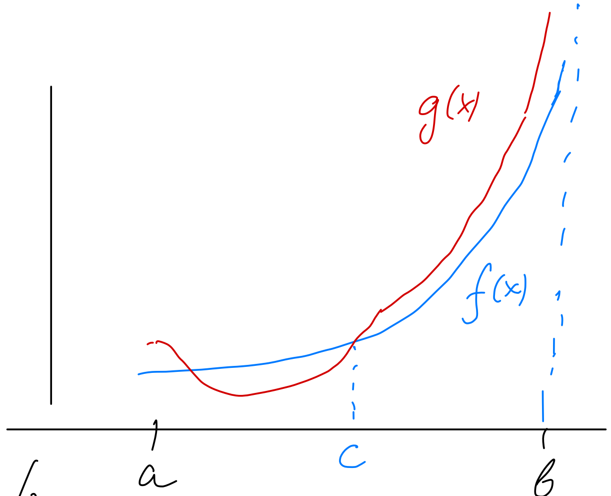
$$\int_{0+}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0+}\int_t^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0+}\left(\ln x\Big|_t^1\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0+}(\underbrace{\ln 1}_{\searrow 0} - \underbrace{\ln t}_{\searrow -\infty}) = +\infty$$

L'intégrale généralisée $\int_{0+}^{1}\frac{dx}{x}$ diverge



Proposition. Critère de comparaison. Soient $f, g : [a, b[$ fonctions continues telles qu'il existe $c \in]a, b[$: $0 \le f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [c, b[$



Alors si $\displaystyle\int_a^{b-} g(x)\,dx$ converge (la limite finie existe) $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_a^{b-} f(x)\,dx$ converge

Si $\displaystyle\int_a^{b-} f(x)\,dx$ diverge $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_a^{b-} g(x)\,dx$ diverge

Il existe un critère similaire pour $f, g :]a, b] \to \mathbb{R}$ continues.

Ex. $a < b$

$$\int_a^{b-} \frac{dt}{(b-t)^\alpha} \overset{\alpha \ne 1}{=} -\int_{b-a}^{0+} \frac{du}{u^\alpha} = \int_{0+}^{b-a} \frac{du}{u^\alpha} = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{-\alpha+1} u^{-\alpha+1} \Big|_x^{b-a} = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{1-\alpha}\left((b-a)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(b-a)^{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ \text{divergente}, & \alpha > 1 \end{cases}$$

Changement de variable
$u = b - t \Rightarrow du = -dt$
$t = a \Rightarrow u = b - a$, $t = b- \Rightarrow u = 0+$

$\alpha = 1 \Rightarrow$
$$\int_a^{b-} \frac{dt}{b-t} = -\int_{b-a}^{0+} \frac{du}{u} = \int_{0+}^{b-a} \frac{du}{u} = \lim_{x \to 0+} \left(\ln(b-a) - \underbrace{\ln x}_{\to -\infty}\right) = +\infty \text{ divergente}$$

$$\boxed{\int_a^{b-} \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(b-a)^{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ \text{divergente}, & \alpha \ge 1. \end{cases}}$$

Corollaire Soit $f:[a,b[\to\mathbb{R}$ continue. Supposons qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\cdot(b-x)^\alpha = \underset{\in\mathbb{R}}{\ell} \neq 0$. Alors l'intégrale généralisée $\int_a^{b^-} f(t)dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha<1$ et diverge $\Leftrightarrow \alpha\geq 1$.

Dém: Soit $\ell>0$, $\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^\alpha f(x)=\ell \Rightarrow \exists c\in\,]a,b[\,:\ \forall x\in[c,b[$ on a

$$\frac{1}{2}\ell \leq \underbrace{(b-x)^\alpha}_{>0\ \ x<b} f(x) \leq \frac{3}{2}\ell \Rightarrow \frac{\ell}{2}\frac{1}{(b-x)^\alpha} \leq f(x) \leq \frac{3\ell}{2}\frac{1}{(b-x)^\alpha} \quad \forall x>c,\ x<b$$

$\Rightarrow$ Par le critère de comparaison $\int_a^b f(t)dt$ est convergente $\Leftrightarrow \alpha<1$, divergente $\Leftrightarrow \alpha\geq 1$ $\blacksquare$

D'une façon similaire on obtient: Soit $f:\,]a,b]\to\mathbb{R}$ continue. Supposons qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)(x-a)^\alpha = \underset{\in\mathbb{R}}{\ell}\neq 0$. Alors l'intégrale généralisée $\int_{a^+}^{b} f(t)dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha<1$, diverge $\Leftrightarrow \alpha\geq 1$.

Ex. $\int_0^{1^-}\frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$ converge ou diverge? (la primitive ne s'exprime pas en fonctions élémentaires)

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{(1-x)^\alpha}{\sqrt{1-x^3}} \overset{\text{on veut}}{=} \ell\neq 0 \qquad \lim_{x\to 1^-}\frac{(1-x)^\alpha}{\sqrt{(1-x)(1+x+x^2)}} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(1-x)^{1/2}}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\neq 0$$

il faut prendre $\alpha=\frac{1}{2}$

Par le critère puisque $\alpha=\frac{1}{2}<1 \Rightarrow \int_0^{1^-}\frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$ converge.

Déf Soit $a<b$, $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ continue, $c \in]a,b[$ arbitraire

Alors l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{b-} f(t)\,dt \overset{\text{déf}}{=} \int_{a+}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{b-} f(t)\,dt$$ converge si et seulement si

les deux intégrales généralisées convergent. La définition ne dépend pas du choix de $c \in]a,b[$.

Ex. $$\int_{0+}^{1-} \frac{dx}{x^r(1-x)^s} \overset{\text{déf}}{=} \int_{0+}^{1/2} \frac{dx}{x^r(1-x)^s} + \int_{1/2}^{1-} \frac{dx}{x^r(1-x)^s}$$

(1) On cherche $\alpha_1 \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to 0+} f(x)\cdot x^{\alpha_1} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^{\alpha_1}}{x^r(1-x)^s} = \ell \neq 0$$

$\Rightarrow$ il faut prendre $\alpha = r$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0+} \frac{x^r}{x^r(1-x)^s} = 1$$

$$\Rightarrow \int_{0+}^{1/2} \frac{dx}{x^r(1-x)^s} \text{ converge} \Leftrightarrow r<1$$

(2) On cherche $\alpha_2 \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to 1-} f(x)(1-x)^{\alpha_2} = \lim_{x\to 1-} \frac{(1-x)^{\alpha_2}}{x^r(1-x)^s} = \ell \neq 0$$

$\Rightarrow$ il faut prendre $\alpha_2 = s$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1-} \frac{(1-x)^s}{x^r(1-x)^s} = 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow \int_{1/2}^{1-} \frac{dx}{x^r(1-x)^s} \text{ converge} \Leftrightarrow s<1$$

$$\Rightarrow \int_{0+}^{1-} \frac{dx}{x^r(1-x)^s}$$ converge $\Longleftrightarrow$ $r<1$ et $s<1$

Intégrales généralisées sur un intervalle non borné.

Déf. Soit $f: [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'intégrale généralisée

$$\int_a^{\infty} f(t)\,dt \overset{\text{déf}}{=} \lim_{x \to +\infty} \int_a^{x} f(t)\,dt$$ si la limite existe. (un nombre réel)

Sinon, l'intégrale généralisée $\int_a^{\infty} f(t)\,dt$ est divergente.

Soit $f:]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt \overset{\text{déf}}{=} \lim_{x \to -\infty} \int_x^{b} f(t)\,dt$$ si la limite existe. (un nombre réel).

Sinon, l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt$ est divergente.

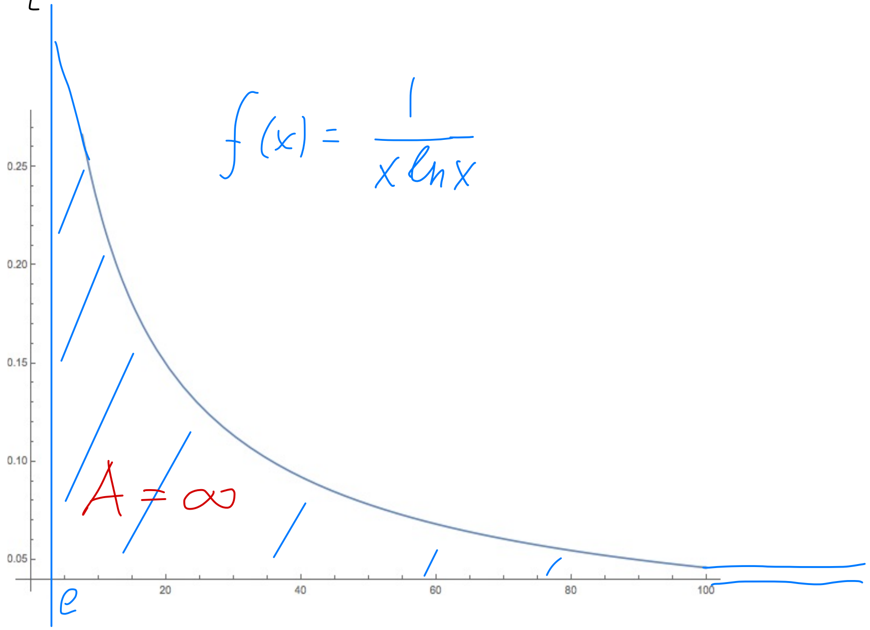
Ex 1. L'aire sous la courbe $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, $x \in [e, +\infty[$

$$\int_e^{\infty} \frac{dt}{t \ln t} = \lim_{x \to \infty} \int_e^{x} \frac{dt}{t \ln t} = \lim_{y \to \infty} \int_1^{y} \frac{du}{u} =$$

$u = \ln t \Rightarrow du = \frac{1}{t}dt$

$\ln e = 1$, $\underset{\to\infty}{\ln x} = y \to \infty$

$$= \lim_{y \to \infty} \ln u \Big|_1^{y} = \lim_{y \to \infty} (\ln y - \underbrace{\ln 1}_{=0}) = \infty \Rightarrow \int_e^{\infty} \frac{dt}{t \ln t} \text{ diverge}$$



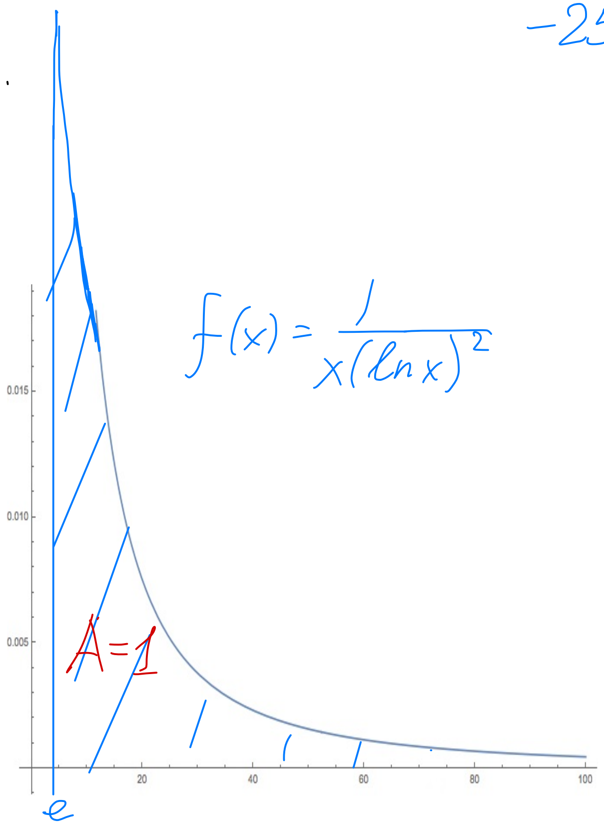
Ex 2. L'aire sous la courbe $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$, $x \in [e, \infty[$.

$$\int_e^\infty \frac{dt}{t(\ln t)^2} = \lim_{x \to \infty} \int_e^x \frac{dt}{t(\ln t)^2} = \lim_{y \to \infty} \int_1^y \frac{du}{u^2} =$$

$u = \ln t \Rightarrow du = \frac{1}{t} dt$

$t = e \Rightarrow u = 1$, $t = x \Rightarrow u = \ln x \to \infty$, $y \to \infty$

$$= \lim_{y \to \infty} \left(-\frac{1}{u}\right)\Big|_1^y = \lim_{y \to \infty} \left(-\frac{1}{y} + 1\right) = 1$$



Critère de comparaison. Si $0 \le f(x) \le g(x)$ pour tout $x > c$ pour un certain $c > a$, Alors

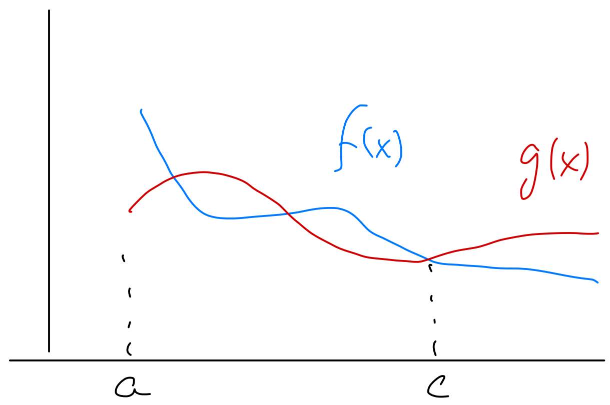
si $\int_a^\infty g(x)dx$ converge $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$ converge ; si $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^\infty g(x)dx$ diverge.

Ex. $$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\beta} \overset{\beta \neq 1}{=} \lim_{R \to \infty} \int_1^R \frac{dx}{x^\beta} = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{1-\beta} x^{1-\beta}\Big|_1^R = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{1-\beta}\left(R^{1-\beta} - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} = -\frac{1}{1-\beta} = \frac{1}{\beta - 1} & \text{si } \beta > 1 \\ \text{diverge}, & \beta < 1 \end{cases}$$

Si $\beta = 1 \Rightarrow \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{R \to \infty} \ln x \Big|_1^R = \lim_{R \to \infty} (\ln R - 0) = \infty$

divergente.



$$\boxed{\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\beta} = \frac{1}{\beta-1},\ \text{si } \beta>1 \quad \text{divergente, si } \beta\le 1}$$

à comparer avec

$$\boxed{\int_{0+}^{1} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha},\ \alpha<1 \quad \text{divergente, } \alpha\ge 1}$$

Corollaire Soit $f:[a,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue et $\beta\in\mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\cdot x^\beta = \underset{\in\mathbb{R}}{\ell} \neq 0$

Alors $\int_a^\infty f(t)\,dt$ converge $\Leftrightarrow \beta>1$
diverge $\Leftrightarrow \beta\le 1$

Ex. $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ converge ou diverge ? (ne s'exprime pas en fonctions élémentaires)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^\beta}{\sqrt{x^3+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^\beta}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{3/2}}{x^{3/2}\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}} = 1 \neq 0 \Rightarrow \beta=\frac{3}{2}>1 \Rightarrow$$

pour avoir une limite $\neq 0 \neq \infty$, il faut $\beta=\frac{3}{2}$

l'intégrale $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ converge.

Déf Soit f une fonction continue sur $]a,+\infty[$. Alors l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{\infty} f(t)\,dt \overset{\text{déf}}{=} \int_{a+}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{\infty} f(t)\,dt \quad \text{pour un } c\in\,]a,\infty[$$

converge si et seulement si les deux intégrales généralisées convergent.

Sinon, l'intégrale généralisée $\int_{a+}^{\infty} f(t)\,dt$ diverge.

Déf Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, alors on peut aussi considérer

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \overset{\text{déf}}{=} \int_{-\infty}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{\infty} f(t)\,dt \,, \quad c \in \mathbb{R}\,,$$ qui est convergente si et seulement si les deux intégrales convergent.

La définition ne dépend pas du choix de $c \in \mathbb{R}$.

Ex. $\int_{0+}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x}$ convergente? $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{x^{\alpha}}{\sin^2 x} \overset{\alpha=2}{=} \lim\limits_{x\to 0+} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 = 1 \Rightarrow \alpha = 2 > 1 \Rightarrow$ par le critère l'intégrale $\int_{0+}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x}$ diverge

Directement: $\int_{0+}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim\limits_{h \to 0+} \int_{h}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim\limits_{h\to 0+} (-\cot x)\Big|_{h}^{\pi/2} = \lim\limits_{h \to 0+} \Big(\underbrace{-\cot\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}_{0} + \underbrace{\cot(h)}_{\to +\infty}\Big) = \infty$ diverge

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

Exercice. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} = ?$ calculer l'intégrale généralisée si elle converge.

Critère de comparaison $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^{\beta}}{x^2+4x+9} = \ell \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{matrix} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+4x+9} = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ il faut prendre $\beta = 2 > 1$ $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+9}\,dx$ converge

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} = \int_{-\infty}^{c} \frac{dx}{x^2+4x+9} + \int_{c}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} = \int_{-\infty}^{c} \frac{dx}{(x+2)^2+5} + \int_{c}^{\infty} \frac{dx}{(x+2)^2+5} =$$

$D = 16-36 < 0$

$$\frac{1}{(x+2)^2+5} = \frac{1}{5}\,\frac{1}{\left(\frac{(x+2)}{\sqrt{5}}\right)^2+1}$$

changement de variable

$u = \frac{x+2}{\sqrt{5}} \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{5}}dx$

$x \to \pm\infty \Rightarrow u \to \pm\infty$

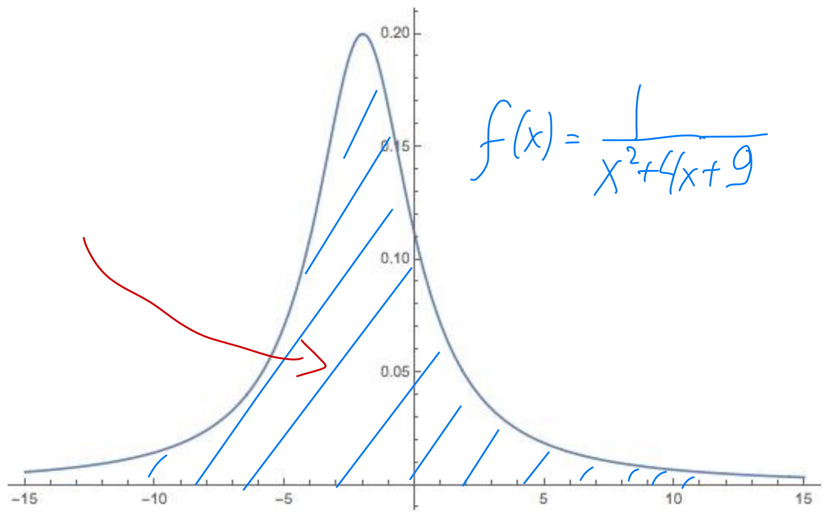
Soit $c = -2 \Rightarrow u = 0$

$$= \lim_{R\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \int_{R}^{0} \frac{du}{u^2+1} + \lim_{S\to\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \int_{0}^{S} \frac{du}{u^2+1} =$$

$$= \lim_{R\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan u \Big|_{R}^{0} + \lim_{S\to\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan u \Big|_{0}^{S} = \lim_{R\to-\infty}\Big(0 - \frac{1}{\sqrt{5}} \underbrace{\arctan R}_{\searrow -\frac{\pi}{2}}\Big) + \lim_{S\to\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{5}} \underbrace{\arctan S}_{\searrow \frac{\pi}{2}} - 0\Big) =$$

$$= 0 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$$

$A = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$



$f(x) = \frac{1}{x^2+4x+9}$

Question 26

L'intégrale generalisée $\int_3^\infty \frac{dx}{x^2+3x} =$

A. vaut $\ln 4$

B. vaut $\ln \frac{1}{4}$

C. vaut $\frac{1}{3}\ln 2$

D. diverge

E. vaut $\frac{2}{3}\ln 2$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_3^R \frac{dx}{x^2+3x} = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{3}\int_3^R \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right)dx =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(\frac{1}{3}\int_3^R \frac{dx}{x} - \frac{1}{3}\int_3^R \frac{dx}{x+3}\right) =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{3}\left(\ln x - \ln(x+3)\right)\Big|_3^R = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{3}\ln\left(\frac{x}{x+3}\right)\Big|_3^R =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{3}\left(\ln\left(\frac{R}{R+3}\right) - \ln\frac{3}{6}\right) = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\ln 2 =$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2.$$