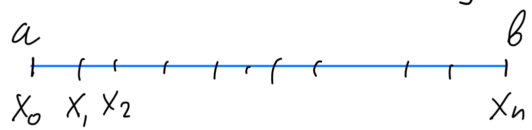
Chapitre 7. Calcul intégral.

Intégrale d'une fonction continue.

Déf. Sommes de Darboux. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue

Soit $\sigma = \{x_0 = a < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b\}$

σ = subdivision de $[a,b]$



Ex. σ regulière d'ordre $n = \{a, a+\frac{b-a}{n}, a+\frac{2}{n}(b-a), \ldots a+\frac{(n-1)}{n}(b-a), b\}$

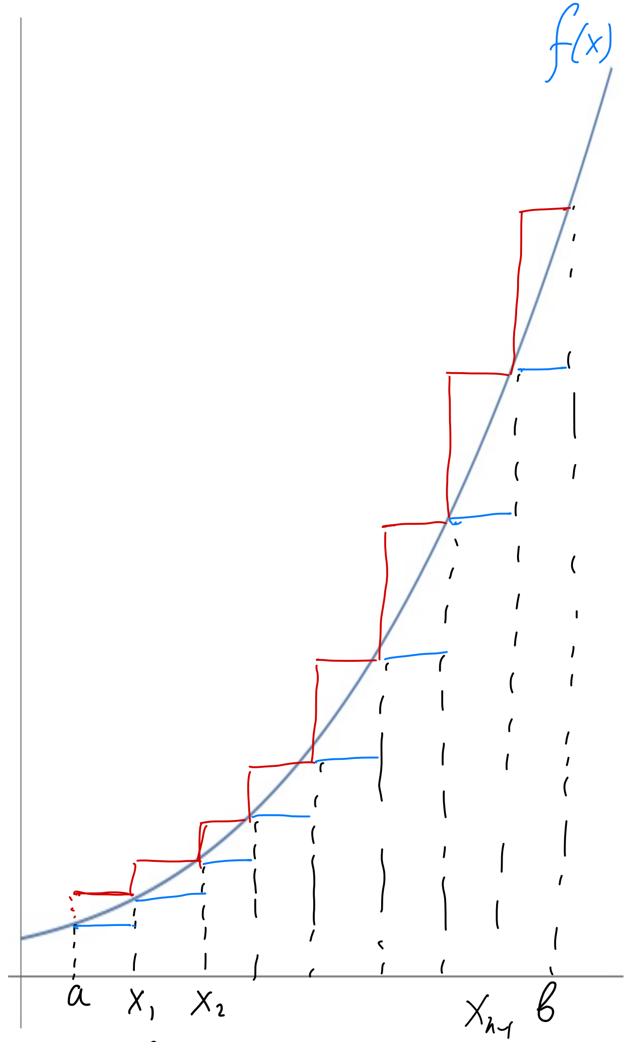
Pas de subdivision $\mathcal{P}(\sigma) = \max\{x_i - x_{i-1}\}$

Alors $\boxed{\overline{S}_\sigma(f) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})}$ où $M_k = \max\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$

est la somme de Darboux supérieure de f relativement à σ

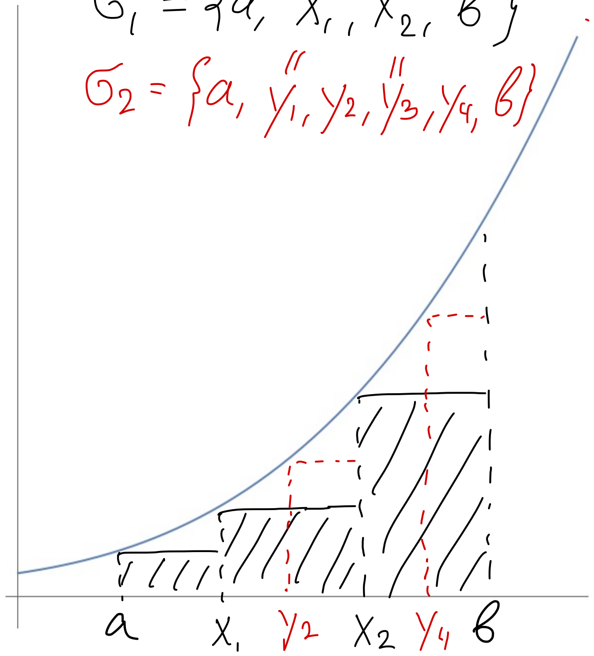
$\boxed{\underline{S}_\sigma(f) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})}$ où $m_k = \min\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$

est la somme de Darboux inférieure de f relativement de σ



$$m(b-a) \le \underline{S}_\sigma(f) \le \overline{S}_\sigma(f) \le M(b-a), \quad M = \max_{[a,b]} f(x), \quad m = \min_{[a,b]} f(x)$$

$$m(b-a) \leq \underline{S}_\sigma(f) \leq \overline{S}_\sigma(f) \leq M(b-a),$$



Remarque. Si $\sigma_1 \subset \sigma_2$ ← on ajoute des points

$$\Rightarrow \underline{S}_{\sigma_1}(f) \leq \underline{S}_{\sigma_2}(f) \leq \overline{S}_{\sigma_2}(f) \leq \overline{S}_{\sigma_1}(f)$$

Proposition. Soit $\overline{S}(f) \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{Inf}\{\overline{S}_\sigma(f),\ \sigma \text{ subdivision de } [a,b]\}$

$$\underline{S}(f) \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{Sup}\{\underline{S}_\sigma(f),\ \sigma \text{ subdivision de } [a,b]\}$$

Théorème Alors si f est continue sur $[a,b]$, $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$ [Voir DZ §9.1.5]

Déf Soit $a<b$, et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ bornée, telle que $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$

Alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{déf}}{=} \overline{S}(f) = \underline{S}(f)$ est l'intégrale de Riemann de la fonction f sur $[a,b]$

borne sup → b

borne inf → a

variable d'intégration → x

Déf. Si $b < a$ $\quad \int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{déf}}{=} -\int_b^a f(x)\,dx \quad ; \quad \int_a^a f(x)\,dx = 0.$

Calcul d'intégrale: f continue

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_{\sigma_n}(f) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_{\sigma_n}(f),$$ où $\{\sigma_n\}$ est une suite de subdivisions de $[a,b]$ telle que $\delta(\sigma_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Ex $\displaystyle\int_0^3 x\,dx$ $\quad \sigma_n = \{0, \underbrace{\tfrac{3}{n}}_{x_1}, \underbrace{2\cdot\tfrac{3}{n}}_{x_2}, \dots, \underbrace{(n-1)\tfrac{3}{n}}_{x_{n-1}}, 3\}$ $\quad x_k = k\cdot\frac{3}{n}$, $\quad x_k - x_{k-1} = \frac{3}{n} \quad \forall k = 1,\dots,n$

$$\max_{[x_{k-1},x_k]} f(x) = x_k = \frac{3k}{n} \quad ; \quad \min_{[x_{k-1},x_k]} f(x) = x_{k-1} = \frac{3(k-1)}{n}$$

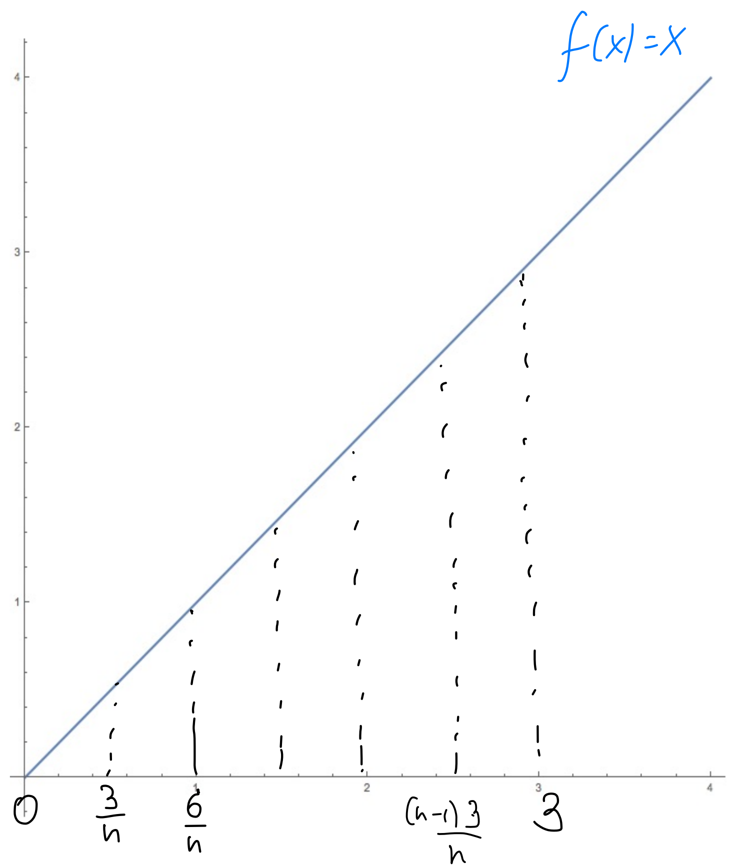
$$\overline{S}_{\sigma_n}(f) = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{3k}{n}\cdot\frac{3}{n} = \frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^n k = \frac{9}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\underline{S}_{\sigma_n}(f) = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{3(k-1)}{n}\cdot\frac{3}{n} = \frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^n (k-1) = \frac{9}{n^2}\,\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_{\sigma_n}(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{9n(n+1)}{2n^2} = \frac{9}{2}$$

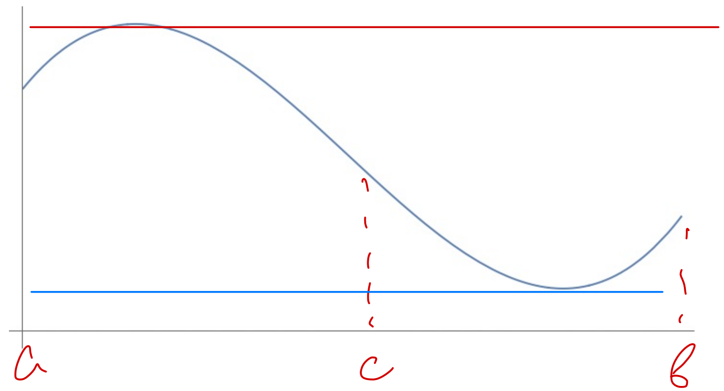
$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}_{\sigma_n}(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{9n(n-1)}{2n^2} = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^3 x\,dx = \frac{9}{2}$$ ☺



Propriétés (1) $a \leq b$. $f(x)$ continue sur $[a,b]$.

Soit $c \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$



(2) $m(b-a) \leq \underline{S}(f) \leq \overline{S}(f) \leq M(b-a)$

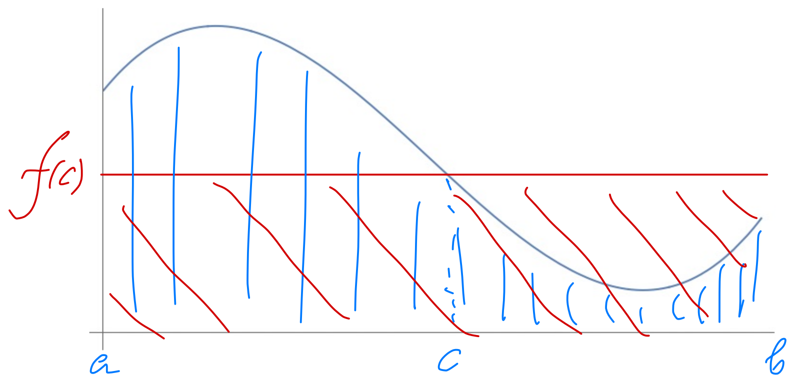
où $m = \min\limits_{[a,b]} f(x)$ $\quad M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$

$$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

(3) **Théorème de la moyenne** : $a<b$, $f(x)$ continue sur $[a,b]$

Alors il existe un point $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$$



Dém: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

$$\Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

$m = \min\limits_{[a,b]} f(x)$ $\quad M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$

f est continue $\Rightarrow$ Par TVI sur $[a,b]$ $\exists\, c \in [a,b]$: tel que

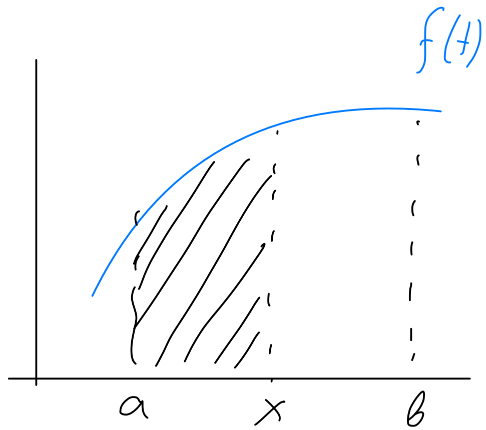
$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow f(c)\cdot(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Relation entre l'intégrale et a primitive de f sur $[a,b]$.

Rappel: Une primitive $F(x)$ d'une fonction continue $f(x)$ sur $[a,b]$ est une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, telle que $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in]a,b[$. Si $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont deux primitives de $f(x)$ sur $[a,b]$ alors $F_1(x) - F_2(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$ $\forall x \in [a,b]$.

Proposition. Soit $a < b$, f une fonction continue sur $[a,b]$.
Alors la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de $f(x)$ sur $[a,b]$ telle que $F(a) = 0$

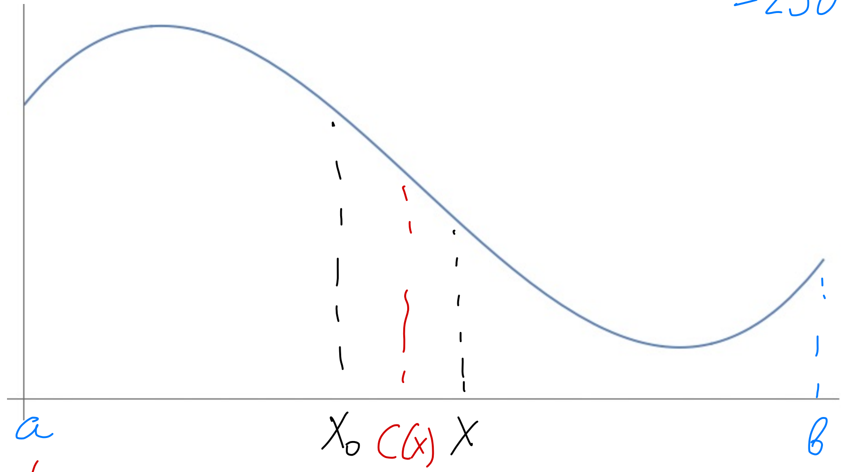
Dém: Soit $x_0 \in]a,b[$



Considérons $\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{1}{x-x_0}\left(\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right) =$

$$\frac{1}{x-x_0}\left(\int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{x-x_0}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right) \underset{\text{Thm de la moyenne}}{=} f(c(x))$$ où $c(x)$ est entre x_0 et x



$$\Rightarrow F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} f(c(x)) \overset{f \text{ continue}}{=} f(x_0)$$

$x\to x_0 \Rightarrow c(x)\to x_0$

$$\Rightarrow F'(x_0) = f(x_0) \quad \forall x_0 \in \,]a,b[$$

Il faut aussi démontrer que $\lim_{x\to a+} F(x) = F(a) = 0$, $\lim_{x\to b-} F(x) = F(b)$

exercice

$$\lim_{x\to a+} F(x) = \lim_{x\to a+} \int_a^x f(t)\,dt = \lim_{x\to a+} \overbrace{(x-a)}^{\to 0}\,\overbrace{f(c(x))}^{\to f(a)} = 0 = F(a).$$

$c(x)$ entre a et x

$\boxed{}$

Corollaire Théorème fondamental du calcul intégrale

Soit $a<b$, $f(x)$ continue sur $[a,b]$. Si $G(x)$ est une primitive de $f(x)$ sur $[a,b]$

alors
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = G(b)-G(a)}$$

Dém: On sait que $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f sur $[a,b]$ telle que $F(a)=0$.

Alors $F(x) = G(x)+C \quad \forall x\in[a,b] \Rightarrow G(b)-G(a) = F(b)-F(a) =$

$$= \int_a^b f(t)\,dt - \underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{=0} = \int_a^b f(t)\,dt$$

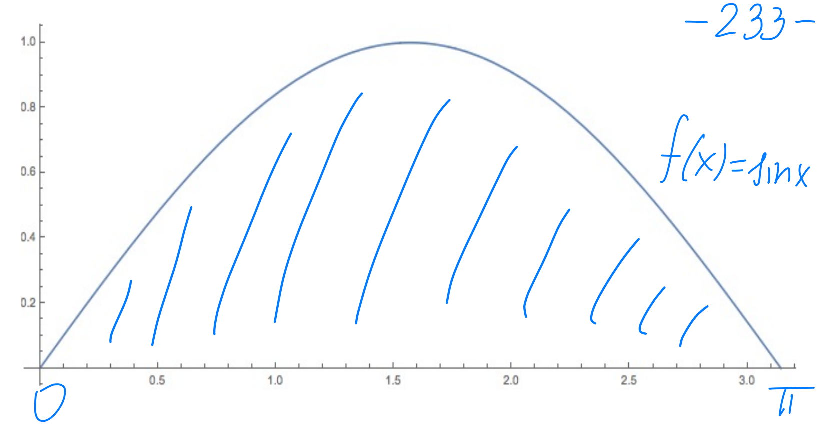
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)}$$

où $f(x)$ est continue sur $[a,b]$ et $F(x)$ est une primitive de f sur $[a,b]$ ▨

$f(x)$	$F(x)$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sinh x$	$\cosh x + C$
$\cosh x$	$\sinh x + C$
$a^x, \quad a>0, a \neq 1$	$\frac{1}{\ln a} a^x + C$
$\frac{1}{x} \quad , x \neq 0$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$x^r, \quad r \neq -1$	$\frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$

<u>Ex.</u> $\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos(0)) =$

$= 1 + 1 = 2$



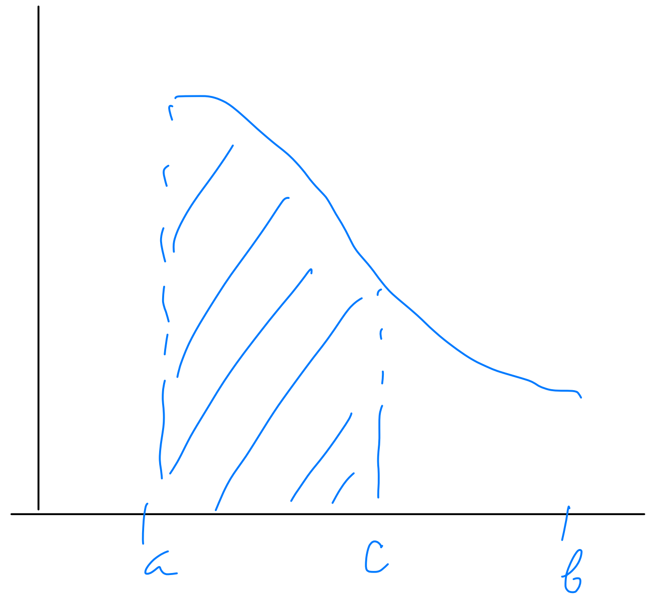
<u>Propriétés</u> (1) Linéarité : $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$

puisque $(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha f(x) + \beta g(x)$.

(2) Si $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$, $c \in]a,b[$

$\Rightarrow 0 \leq \int_a^c f(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$ parce que

$F'(x) = f(x) \geq 0 \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est croissante sur $[a,b]$



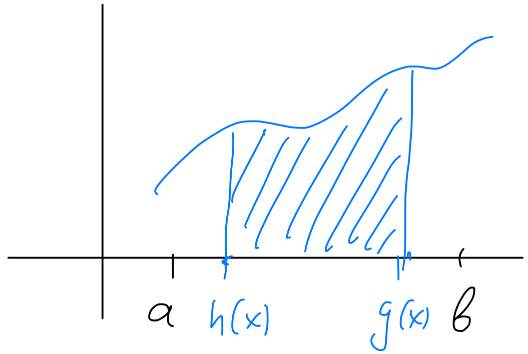
$\Rightarrow$ Si $f(x) \geq 0$ sur $[a,b]$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ et si $\int_a^b f(x)\,dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \ \forall x \in [a,b]$

(3) Corollaire: Si $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

(4). Intégrale fonction de ces bornes.

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, $g,h: I \to [a,b]$ dérivables sur I

Alors
$$\frac{d}{dx}\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt\right) = f(g(x))\cdot g'(x) - f(h(x))\cdot h'(x)$$



Dém:
$$\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = \underbrace{\int_{h(x)}^{a} f(t)\,dt}_{= -\int_a^{h(x)} f(t)\,dt} + \int_a^{g(x)} f(t)\,dt = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt - \int_a^{h(x)} f(t)\,dt = F(g(x)) - F(a) - F(h(x)) + F(a)$$

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \int_a^x f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt\right) = \left(F(g(x)) - F(h(x))\right)' = F'(g(x))\cdot g'(x) - F'(h(x))\cdot h'(x) =$$
$$= f(g(x))\cdot g'(x) - f(h(x))\cdot h'(x) \qquad \blacksquare$$

Ex.
$$\frac{d}{dx}\left(\int_1^{3x^2+3} e^{t^2}\,dt\right) = e^{(3x^2+3)^2}\cdot(3x^2+3)' - e^{1}\cdot\underbrace{(1)'}_{=0} = e^{(3x^2+3)^2}\cdot 6x$$

Techniques d'intégration.

Proposition Formule de changement de variable.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ continûment dérivable sur $I \supset [\alpha,\beta]$

Alors
$$\boxed{\int_{\varphi(\alpha)=a}^{\varphi(\beta)=b} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt}$$
où $x = \varphi(t)$

Ex 1. 1ère méthode
$$\int_1^2 x\,e^{x^2}dx = \int_1^4 \cancel{\sqrt{t}}\,e^t\,\frac{1}{2\cancel{\sqrt{t}}}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^4 e^t\,dt = \frac{1}{2}e^t\Big|_1^4 = \frac{1}{2}\left(e^4-e\right).$$

Soit $x = \sqrt{t} = \varphi(t) \Rightarrow \varphi : [\underset{\alpha}{1}, \underset{\beta}{4}] \xrightarrow{\sqrt{t}} [\underset{a}{1}, \underset{b}{2}]$, $\varphi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

Ex 2. 2ème méthode
$$\int_1^2 \underbrace{x\,e^{\overbrace{x^2}^{=u}}dx}_{\frac{1}{2}du} = \frac{1}{2}\int_1^4 e^u\,du = \frac{1}{2}e^u\Big|_1^4 = \frac{1}{2}\left(e^4-e\right).$$

Soit $u = x^2 \Rightarrow du = (x^2)'dx = 2x\,dx$; $x \in [1,2] \Rightarrow u = x^2 \in [1,4]$

$$\boxed{u = f(x) \Rightarrow du = (f'(x))\,dx}$$

Exemple.

$$\int_{1/8}^{1/3} \sqrt{\frac{x+1}{x}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2}\,dx}_{-du} = \int_9^4 \sqrt{u} \cdot (-du) = \int_4^9 \sqrt{u}\,du =$$

$$\sqrt{\frac{x+1}{x}} = \sqrt{1+\frac{1}{x}}$$

Soit $u = 1+\frac{1}{x} \Rightarrow u' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow du = \left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$

$$\sqrt{\frac{x+1}{x}} = \sqrt{u}$$

$$x \in \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{3}\right] \Rightarrow x = \frac{1}{8} \Rightarrow u = 1+\frac{1}{x} = 1+\frac{1}{\frac{1}{8}} = 9$$

$$x = \frac{1}{3} \Rightarrow u = 1+\frac{1}{x} = 1+\frac{1}{\frac{1}{3}} = 4$$

$$= \int_4^9 u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_4^9 = \frac{2}{3}\left(9^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}(27-8) = \frac{38}{3}.$$

Proposition. Formule de changement de variable.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ continûment dérivable sur $I \supset [\alpha,\beta]$.

Alors
$$\boxed{\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt}$$
où $x = \varphi(t)$

Dém: Soit $G(t) = \int_a^{\varphi(t)} f(x)\,dx \Rightarrow G'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) \overset{\text{def}}{=} g(t)$

$\Rightarrow G(t)$ est une primitive de $g(t) \Rightarrow \int_\alpha^\beta g(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int_a^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx - \int_a^{\varphi(\alpha)} f(x)\,dx =$$

$$= \int_a^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx + \int_{\varphi(\alpha)}^{a} f(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx$$

$\blacksquare$

Question 24.

$$\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{1}{x + x\ln(3x)} \quad \text{vaut}$$

A. $\ln(1+\ln 3)$

B. $\ln(1+\ln 3) - \ln\left(\frac{1}{3}\right)$

C. $\ln(3)$

D. $1 + \ln 3 + \ln(\ln 3)$

E. $\frac{1}{1+\ln 3}$

$$\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{1}{x} \frac{1}{1+\ln(3x)} dx = \int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{1}{1+\ln 3 + \ln x} d(\ln x) =$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} dx = d(\ln x)$$

$$= \int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{1}{\underbrace{(1+\ln 3)}_{\text{const}} + \ln x} d\left(\ln x + (1+\ln 3)\right) = \ln\left(1+\ln 3 + \ln x\right)\Big|_{\frac{1}{3}}^{1} =$$

$$(1+\ln 3)' = 0$$

$$= \ln(1+\ln 3) - \ln\left(1+\ln 3 + \underbrace{\ln\frac{1}{3}}_{= -\ln 3}\right) =$$

$$= \ln(1+\ln 3) - \ln(1) = \ln(1+\ln 3).$$