Rappel: Series entières $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$, $a_k \in \mathbb{R}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

Proposition Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ une série entière de rayon de convergence r.

Supposons que $a_k \neq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$

(1) Si $\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \ell$ avec $0 \leq \ell \leq +\infty$, alors $r = \frac{1}{\ell}$.

(2) Si $\lim_{k \to \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = \ell$ avec $0 \leq \ell \leq +\infty$, alors $r = \frac{1}{\ell}$.

Generalisation de (2): Critère de Cauchy generalisé.

Si $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est une série numérique telle que
$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ conv abs
$\limsup \sqrt[n]{|x_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ div.
ou si $\sqrt[n]{|x_n|}$ n'est pas bornée

Corollaire: pour les séries entières

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ une série entière; alors

si $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$, $0 \leq \ell \leq +\infty$

Alors le rayon de convergence $r = \frac{1}{\ell}$.

Exemple $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, $a_n = \frac{1}{n^n}$, n impair ; $a_n = \frac{1}{n}$, n pair.

Trouver le rayon de convergence.

$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 = \ell \Rightarrow r = \frac{1}{\ell} = 1$ le rayon de convergence

noter que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ n'existe pas. $\{\frac{1}{n^n}\}$ $\{\frac{1}{n}\}$ sous-suites

Remarque. Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(n) = \ell$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} \sim \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{\alpha}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln x^{\frac{\alpha}{x}}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\alpha}{x}\ln x}$ e^x continue $\Leftrightarrow$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$\Leftarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha}{x}\ln x = \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha \ln x}{x} \stackrel{BL}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\alpha}{x}}{1} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} x^{\frac{\alpha}{x}} = e^0 = 1$

$\frac{\infty}{\infty}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

§6.2. Série de Taylor.

Soit $f : \underset{\text{ouvert}}{I} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^\infty(I)$ (indéfiniment dérivable), et $x_0 \in I$.

Alors $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$ est la série de Taylor de f au point x_0.

série entière

Si $x_0 = 0$ $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}$ est la série de MacLaurin.

2 Questions: (1) Trouver le rayon et le domaine D de convergence de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

(2) Trouver l'ensemble $E \subset D$: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

(E est l'ensemble où la série de Taylor converge vers $f(x)$)

Rappel: $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{\text{polynome de Taylor}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{\text{Reste } R_n(f)}$ u est entre x et x_0

$n \to \infty$ $n \to \infty$ $n \to \infty$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \ ?$$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ converge vers $f(x)$ $\Longleftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} R_n(f) = 0$.

Ex 1. $e^x \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R} \Rightarrow D = \mathbb{R},\ E = D = \mathbb{R}$

Ex 2. $f(x) = \ln x \Rightarrow f \in C^{\infty}(]0, +\infty[)$

$$f'(x) = \frac{1}{x}\ ;\ f''(x) = -\frac{1}{x^2},\ f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}\ ;\ f^{(4)}(x) = \frac{-2\cdot 3}{x^4} \cdots f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{x^k}\Bigg|_{x=1}$$

$$\Rightarrow \text{Taylor}(\ln x)_{x=1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k$$

Si $x-1 = y \Rightarrow x = y+1 \Rightarrow \text{MacLaurin}(\ln(1+y))_{y=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} y^k = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \ldots$

Rayon de convergence: pour $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k$

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1}\,\frac{k}{1} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{1} = 1.\quad D \supset]0, 2[$$

Si $x = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(-1)^k}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge, série harmonique

Si $x = 2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge, harmonique alternée.

$$\Rightarrow D =]0, 2]$$

(2) $E = ?$ $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+2}}{u^{n+1}} n! \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \left| \frac{x-1}{u} \right|^{n+1}$ difficile ! :(

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}$$

Si $x=2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \left| \frac{1}{u} \right|^{n+1} = 0 \Rightarrow \ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots = \ln 2$

$1 < u < 2$

On verra plus tard que $D = E =]0, 2]$.

Ex 3. $f(x) = \frac{1}{1-x} \Rightarrow$ Série de MacLaurin (donnée par la série géometrique)

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad D = E =]-1, 1[$$

Ex 4. $f(x) = \sin x$ $\quad f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f^{(3)} = -\cos x$, ...

$f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$, ...

$$\text{MacLaurin}(\sin x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Critère de d'Alembert : $\lim_{k\to\infty} \left| \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!} \frac{(2k+1)!}{x^{2k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|^2}{(2k+3)(2k+2)} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow D = \mathbb{R}$

(2) $E = ?$ $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\pm \sin u \text{ ou } \pm \cos u}{(n+1)!} \right| |x|^{n+1} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow E = D = \mathbb{R}$

Remarque: Critere de d'Alembert : $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!} \frac{(n+1)!}{|x|^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+2} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$

D'une façon similaire on trouve :

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \end{aligned}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Et aussi :

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$\boxed{\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\ \sinh x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ \cosh x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \end{aligned}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Remarque. Exemple de la série de Taylor(f) qui converge, mais pas vers la fonction f(x).

Soit $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ indéfiniment dérivable autour de $x=0$.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2} - 0}{x-0} = \pm \lim_{|x|\to 0^+} \frac{e^{-1/x^2}}{|x|} = \pm \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{-1/2}} = \pm \lim_{t\to\infty} \frac{t^{1/2}}{e^t} \overset{BL}{=} \pm \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{2}}{t^{1/2} e^t} = 0$$

$t = \frac{1}{x^2} \Rightarrow |x| = \frac{1}{\sqrt{t}}$

$$\Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f'(x) = e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{-1/x^2}}{x^4} = \lim_{t\to\infty} \frac{2e^{-t}}{t^{-2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{2t^2}{e^t} = 0.$$

$t = \frac{1}{x^2}$

D'une manière similaire on trouve $f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \geq 0$

$\Rightarrow f$ est de classe $C^\infty(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \text{Taylor}(f)_{x=0} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

Alors $\text{Taylor}(f)_{x=0} \neq f(x)$ sauf pour $x = 0$.

$D = \mathbb{R}, \qquad E = \{0\}$

§6.3. Primitive et dérivée d'une fonction définie par une série entière.

Déf. Soit $\underset{\text{continue}}{f}: [a,b] \to \mathbb{R}$. La fonction $\underset{\text{continue}}{F}: [a,b] \to \mathbb{R}$ est une primitive de f sur $[a,b]$ si $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in]a,b[$.

Si $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont deux primitives de $f(x)$ sur $[a,b]$, alors

$$F_1(x) = F_2(x) + \alpha \quad \forall x \in [a,b] \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

(puisque $F_1'(x) - F_2'(x) = 0$ sur $]a,b[\Rightarrow F_1(x) - F_2(x) = \alpha$)

Ex.

$$f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad F(x) = -\cos x + C$$

$$f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad F(x) = \sin x + C$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \ln x + C, \quad x > 0$$

$$f(x) = x^k \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{k+1} x^{k+1} + C, \quad \begin{matrix} x > 0 \\ k \neq -1 \end{matrix}$$

$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad F(x) = e^x + C$$

Théorème (1) Les deux séries entières $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}$ ont le même rayon de convergence r.

(2) Si $r>0$, alors $f(x) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k$ est continue sur $]x_0-r, x_0+r[$

(3) Si $r>0$, alors $F(x) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}$ est la primitive de $f(x)$ sur $]x_0-r, x_0+r[$ telle que $F(x_0)=0$.

(DZ, §8.3).

Corollaire Les deux series entières $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$ ont le même rayon de convergence. r

Si $r>0$, alors $f(x) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ est continûment dérivable sur $]x_0-r, x_0+r[$ et $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$.

Ex. $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad \forall z \in]-1,1[$ Soit $x = 1-z \Rightarrow z = 1-x$

$\Rightarrow \frac{1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (1-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k \quad \forall x \in]0,2[\Rightarrow$ le rayon de convergence $r=1$

Considérons $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}(x-1)^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k = \text{Taylor}(\ln x)_{x=1}$

Par le Thm, la série entière $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k$ est la primitive de $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(x-1)^k = \frac{1}{x}$ et les 2 séries ont le même rayon de convergence $r=1$

$$F(x) = \left(\underset{\text{t.q. } F(1)=0}{\text{la primitive de } \frac{1}{x}}\right) = \ln x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k \quad \forall x \in]0,2[$$

On a déjà vu que $\text{Taylor}(\ln x)_{x=1}$ converge vers $\ln 2$ pour $x=2$

$\Rightarrow$ Donc on a pour $f(x) = \ln x$: $E = D =]0,2]$

Finalement:

$$\boxed{\begin{aligned} \ln x &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k, \quad x \in]0,2] \\ \frac{1}{x} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k, \quad x \in]0,2[\end{aligned}}$$

On note que les domaines de convergence de deux séries sont différents dans ce cas, mais les <u>rayons</u> de convergence sont toujours les mêmes.

Question 23

La série entière $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)^n}(x+1)^n$

A. Converge pour tout $x \in \mathbb{R}$

B. Diverge pour $x = 0,12$

C. Diverge pour $x = -\pi$

D. Converge pour $x = 4,1$

E. Converge pour $x = -8,6$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(2n+2)^{n+1}} \frac{(2n)^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,2^n n^n}{2^{n+1}(n+1)^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\xrightarrow{n\to\infty} e}} = \frac{1}{2e}.$$

$\Rightarrow R = \frac{1}{\ell} = 2e \Rightarrow$ la série converge

$\forall x :\ |x+1| < 2e \Rightarrow -2e < x+1 < 2e$

$-2e-1 < x < -1+2e$

5.4

$\Rightarrow$ conv. pour $x = 4,1$