Rappel: Si $f'(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$, mais $f^{(n)}(c) > 0$, n pair $\Rightarrow$ loc min en $x=c$

$f^{(n)}(c) < 0$, n pair $\Rightarrow$ loc max en $x = c$

Si $f'(c) = \dots f^{(n-1)}(c) = 0$, mais $f^{(n)}(c) \neq 0$, n impair $\Rightarrow$ point d'infexion

Développement limité: $f: E \to F$ définie au voisinage de $x = a$

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n}_{P_f^n(x-a) \text{ - la partie principale}} + \underbrace{(x-a)^n \mathcal{E}(x)}_{R_f^n(x-a) \text{ le reste}}$$ - le DL d'ordre n de f autour de $x=a$.

$R_f^n(x-a)$ le reste ; $\lim_{x \to a} \mathcal{E}(x) = 0$.

Ex. $f(x) = \frac{1}{1-x}$ autour de $x=0$

$$= \underbrace{1 + x + x^2 + \dots + x^n}_{P_f^n(x)} + x^n \underbrace{(x + x^2 + \dots)}_{=\frac{x}{1-x} = \mathcal{E}(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^n \mathcal{E}(x)$$

Proposition Si $f: E \to F$ est n fois dérivable sur un intervalle ouvert contenant $x = a$, alors la formule de Taylor nous fournit le DL d'ordre n de f autour de $x = a$.

Opérations algébriques sur les DL.

Proposition Soient $f, g : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions admettant le DL autour de $x=a$

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon_1(x) = P_f^n(x) + (x-a)^n\varepsilon_1(x) \qquad \lim_{x\to a}\varepsilon_1(x) = 0$$

$$g(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \dots + b_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon_2(x) = P_g^n(x) + (x-a)^n\varepsilon_2(x) \qquad \lim_{x\to a}\varepsilon_2(x) = 0$$

Alors: (1) $\alpha f(x) + \beta g(x)$ admet un DL d'ordre n autour de $x=a$

$$P^n_{\alpha f+\beta g}(x) = \alpha P_f^n(x) + \beta P_g^n(x)$$

$\underbrace{(x-a)^n\varepsilon(x)}_{\substack{\to 0 \\ x\to a}}$

(2) $f(x)\cdot g(x)$ admet un DL d'ordre n autour de $x=a$

$$(x-a)^{n+k} = (x-a)^n(x-a)^k$$

$$P^n_{f\cdot g}(x) = P_f^n(x)\,P_g^n(x) = (a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n)(b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_n(x-a)^n)$$

où on ne retient que les termes d'ordre $\leq n$

(3) Si $b_0 \neq 0$, $g(x) \neq 0$ sur E, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ admet un DL d'ordre n autour de $x=a$

$$P^n_{\frac{f}{g}}(x) = \frac{P_f^n(x)}{P_g^n(x)} = \frac{a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n}{b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_n(x-a)^n}$$ où on ne retient que les termes d'ordre $\leq n$

Ex. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ DL d'ordre 4 autour de $x=0$.

(1) $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}\left(1+\cancel{x}+x^2+\cancel{x^3}+x^4+x^4\varepsilon_1(x)\right) + \frac{1}{2}\left(1-\cancel{x}+x^2-\cancel{x^3}+x^4+x^4\varepsilon_2(x)\right) =$

$$\underline{1+x^2+x^4+x^4\varepsilon_3(x)}$$

(2) $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1+x} = \left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^4\varepsilon_1(x)\right)\left(1-x+x^2-x^3+x^4+x^4\varepsilon_2(x)\right) =$

$= 1+\cancel{x}+\cancel{x^2}+\cancel{x^3}+\cancel{x^4}+\left(-\cancel{x}-\cancel{x^2}-\cancel{x^3}-\cancel{x^4}\right)+\left(x^2+\cancel{x^3}+\cancel{x^4}\right)+\left(-\cancel{x^3}-\cancel{x^4}\right)+x^4+x^4\varepsilon(x) = \underline{1+x^2+x^4+x^4\varepsilon(x)}$

(3) $\frac{1}{1-x^2}$ $\overset{\sim\to}{\text{division}}$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1-x^2 \\ \cline{2-2} -\ \underline{1-x^2} & 1+x^2+x^4 \\ x^2 & \\ -\ \underline{x^2-x^4} & \\ x^4 & \\ \underline{x^4-x^6} & \end{array}$$

$\longrightarrow$ $\underline{1+x^2+x^4+x^4\varepsilon(x)}$

(4) Coefficients indéterminés $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+x^4\varepsilon(x) = \frac{1}{1-x^2}$

$\Rightarrow \left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\varepsilon(x)x^4\right)(1-x^2) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4-a_0x^2-a_1x^3-a_2x^4+\tilde{\varepsilon}(x)x^4 = \underline{1}$

$$\left.\begin{array}{ll} 1: & a_0 = 1 \\ x: & a_1 = 0 \\ x^2: & a_2-a_0 = 0 \\ x^3: & a_3-a_1 = 0 \\ x^4: & a_4-a_2 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a_0 = a_2 = a_4 = 1 \\ a_1 = a_3 = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow \underline{1+x^2+x^4+x^4\varepsilon(x)}$

:-)

Proposition. DL d'une fonction composée.

Soit $f(x) = a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \mathcal{E}_1(x)$ - DL autour de $x=a$

$g(y) = g(0) + b_1 y + \dots + b_n y^n + y^n \mathcal{E}_2(y)$ - DL autour de $y=0$.

Alors $g\circ f$ admet un DL d'ordre n autour de $x=a$,

$P^n_{g\circ f}(x) = g(0) + b_1(P^n_f(x-a)) + b_2(P^n_f(x-a))^2 + \dots + b_n(P^n_f(x-a))^n$ où on ne conserve que les termes d'ordre $\leq n$

[DZ § 6.4.12]

(5) $h(x) = \frac{1}{1-x^2}$; $g(y) = \frac{1}{1-y}$ $f(x) = x^2$ ← DL de f autour de 0 d'ordre ≥ 2

$h = g\circ f(x)$

$\Rightarrow g(y) = 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + \mathcal{E}_1(y) y^4$, $f(x) = x^2$ → remplacer $y = x^2$

$\Rightarrow h(x) = 1 + x^2 + x^4 + (x^6 + x^8) + \dots + x^4 \mathcal{E}(x) = \underline{1 + x^2 + x^4 + x^4 \tilde{\mathcal{E}}(x)}$

Application de DL au calcul des limites.

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

formules de Taylor

Ex. $\lim_{x\to 0} \frac{\left(e^x - \frac{1}{1-x}\right)^2}{x \sin x - x^2}$

Dénominateur: puissance 4 + ordre plus grand.

≥ 4.

$$x\sin x - x^2 \overset{\text{ordre }4}{=} x\left(x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x)\right) - x^2 = -\frac{x^4}{6} + x^4\varepsilon_1(x)$$

$$e^x - \frac{1}{1-x} \overset{\text{ordre }2}{=} \cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + \varepsilon_2(x)\cdot x^2 - \left(\cancel{1} + \cancel{x} + x^2 + x^2\varepsilon_3(x)\right) = -\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_4(x) \quad \Big| \quad \Rightarrow \left(e^x - \frac{1}{1-x}\right)^2 = \frac{x^4}{4} + x^4\varepsilon_5(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^x - \frac{1}{1-x}\right)^2}{x\sin x - x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{4} + x^4\varepsilon_5(x)}{-\frac{x^4}{6} + x^4\varepsilon_1(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{+\frac{1}{4} + \varepsilon_5(x)}{-\frac{1}{6} + \varepsilon_1(x)} = -\frac{3}{2}.$$

Exercice 1. Calculer la même limite par la règle Bernoulli-L'Hospital.

Exercice 2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x} - e^x}{x^3}$

L'ordre du dénominateur est 3 $\Rightarrow$ il faut prendre de DL d'ordre 3 pour le numérateur

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x)\right)^3 = 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^3\varepsilon_2(x)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_3(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_2(x)\right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_3(x)\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_4(x)}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

Chapitre 6. Séries entières. [DZ, Chapitre 8]

Rayon de convergence.

Déf L'expression $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ est dite une série entière, $x_0 \in \mathbb{R}$, $a_k \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}$

Le domaine de convergence $D \overset{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \text{ converge}\}$

la fonction $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$, $x \in D$ est définie par la série entière.

Ex 1. $e^x \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x^k}{k!}}_{u_k}$ Série entière avec $a_k = \frac{1}{k!}$, $x_0 = 0$

Critère de d'Alembert : $\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{x^k}\right| = \frac{|x|}{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ la série converge $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D = \mathbb{R}$

Ex 2. $\sum_{k=0}^{\infty} a^k (x-x_0)^k$ $\quad a > 0 \quad$ Critère de d'Alembert:

$\left|\frac{a^{k+1}(x-x_0)^{k+1}}{a^k (x-x_0)^k}\right| = a|x-x_0|$ Si $< 1 \Rightarrow$ la série converge $\Leftrightarrow$ $|x-x_0| < \frac{1}{a} \Rightarrow$ la serie converge absolument

$> 1 \Rightarrow$ la série diverge

Si $x = x_0 + \frac{1}{a} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{1}{a^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1$ diverge

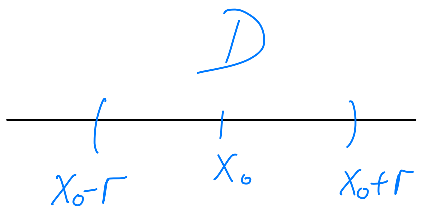
Si $x = x_0 - \frac{1}{a} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a^k \left(-\frac{1}{a}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ diverge $\Rightarrow D = \left]x_0 - \frac{1}{a}, x_0 + \frac{1}{a}\right[$

Théorème (Rayon de convergence) Soit la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$

Alors il existe r : $0 \le r \le +\infty$ tel que

(1) la série converge absolument $\forall x : |x-x_0| < r$

(2) la série diverge $\forall x : |x-x_0| > r$.



Remarques. (1) D est un intervalle qui contient x_0 et centré en x_0.

(2) La convergence de la série entière en $x = x_0 \pm r$ doit être étudié séparement.

(3) Si $r \neq 0$, $r \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow D =$ un des 4 intervalles : $]x_0-r, x_0+r[$, $[x_0-r, x_0+r[$, $]x_0-r, x_0+r]$, $[x_0-r, x_0+r]$.

Si $r = 0 \Rightarrow D = \{x_0\}$ Ex : $\sum_{k=0}^{\infty} k!\, x^k$ $D = \{0\}$

$r = \infty \Rightarrow D = \mathbb{R}$ Ex : $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \Rightarrow D = \mathbb{R}$

Comment calculer le rayon de convergence ?

Proposition. Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ une série entière de rayon de convergence r.

Supposons que $a_k \neq 0 \; \forall k \in \mathbb{N}$

(1) Si $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \ell$ avec $0 \le \ell \le +\infty \Rightarrow r = \frac{1}{\ell}$

on a : $r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$

(2) Si $\lim_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = \ell$ avec $0 \le \ell \le +\infty \Rightarrow r = \frac{1}{\ell}$.

Idée: (1) Critère de d'Alembert (2) Critère de Cauchy

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}(x-x_0)^{k+1}}{a_k (x-x_0)^k}\right| = \lim_{k\to\infty} |x-x_0| \underbrace{\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|}_{k\to\infty \; \searrow \; \ell} = |x-x_0| \cdot \ell \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } |x-x_0|\cdot\ell < 1 \Rightarrow \text{conv} \\ \text{Si } |x-x_0|\cdot\ell > 1 \Rightarrow \text{div} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{Si } |x-x_0| < \frac{1}{\ell} \Rightarrow \text{conv. abs} \\ \text{Si } |x-x_0| > \frac{1}{\ell} \Rightarrow \text{div} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{par la déf}$$

$r = \frac{1}{\ell}$ est le rayon de convergence.

Ex. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{5^n} x^n \Rightarrow r = ? \quad D = ?$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+2)^2}{5^{n+1}} \frac{5^n}{(n+1)^2}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \Rightarrow r = 5 \Rightarrow D \supset]-5, 5[$$

$$x = 5 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{5^n} 5^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 \text{ diverge}$$

$$x = -5 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{5^n} (-5)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1)^2 \text{ diverge}$$

$\Rightarrow$ Finalement $D =]-5, 5[$

Ex. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{5^n} x^{3n}$ plusieurs $a_k = 0 \Rightarrow$ on utilise le critère de Cauchy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)^2}{5^n} |x|^{3n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5} \sqrt[n]{(n+1)^2}\, |x|^3 = \frac{|x|^3}{5} \begin{array}{ll} < 1 & \text{conv. abs.} \\ > 1 & \text{div} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Si $|x| < \sqrt[3]{5}$ conv abs.

$|x| > \sqrt[3]{5}$ div.

$$x = \pm\sqrt[3]{5} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{5^n} \left(\pm\sqrt[3]{5}\right)^{3n}$$

$$\to \left.\begin{array}{l} \sum (n+1)^2 \\ \sum (-1)^{3n} (n+1)^2 \end{array}\right\} \text{divergent.}$$

$$D =]-\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}[$$

Ex. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3 b_n} x^n$, où (b_n) est une suite telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 3$, $b_n \neq 0 \ \forall n$

Trouver le rayon de convergence.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+3)!\, b_n}{((n+1)!)^3 b_{n+1}} \frac{(n!)^3}{(3n)!} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3}}_{\to 27} \underbrace{\frac{b_n}{b_{n+1}}}_{\to \frac{1}{3}} = 9$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{9}$$

Question 22

Le développement limité d'ordre 3 autour de $x=0$ de la fonction $f(x) = e^{\frac{x}{1-x}}$ est

A. $1 + x + 2x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x)$

B. $1 + x + \frac{3}{2}x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x)$

C. $1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{13}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$

D. $1 + x + 2x^2 + 3x^3 + x^3\varepsilon(x)$

E. $1 + x + x^2 + \frac{19}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \varepsilon_1(x)x^3$$

$$\frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + \varepsilon_2(x)x^3$$

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + \varepsilon_3(y)y^3$$

$$\Rightarrow \quad e^{\frac{x}{1-x}} = 1 + \left(x + x^2 + x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(x + x^2 + x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x + x^2 + x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right)^3 + \varepsilon_4(x)x^3 =$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{1}{2}\left(x^2 + 2x^3\right) + \frac{1}{6}x^3 + \varepsilon_5(x)x^3 =$$

$$= 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{13}{6}x^3 + \varepsilon_5(x)x^3$$