Developpements limités. Formule de Taylor.

Théorème (Formule de Taylor). Soit $f : I \to F$ une fonction $(n+1)$ fois dérivable sur $I \ni a$. Alors $\forall x \in I$ il existe u entre x et a tel que

$$\underbrace{f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{P_n(f) \text{ Polynome de Taylor}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{R_n(f) \text{ le reste}}}_{\text{la formule de Taylor.}}$$

Idée: Soit f dérivable sur I $\Rightarrow$ TAF $\forall x, a \in I \Rightarrow \exists u$ entre x et a tel que $f'(u) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$$\Leftrightarrow f(x) - f(a) = f'(u)(x-a) \Rightarrow f(x) = f(a) + f'(u)(x-a) =$$

$$= \underbrace{f(a) + \frac{f'(u)}{1!}(x-a)}_{\text{formule de Taylor d'ordre 0}}$$

$$T_f'(x)\Big|_{x=a} = f'(a)$$

$$T_f''(x)\Big|_{x=a} = f''(a)$$

Ex 1. $f(x) = \sin x$ autour de $a = 0$; $f(x) = \sin x$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\sin x \qquad f'''(x) = -\cos x \qquad f^{(4)}(x) = \sin x \quad \ldots$

$f'(0) = 1 \qquad f''(0) = 0 \qquad f'''(0) = -1 \qquad f^{(4)}(0) = 0$

$$\sin x = \frac{1}{1!}x + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+1}(x)$$

Ex 2. $f(x) = \cos x$ autour de $a = 0$. (Exercice)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n}(x)$$

Remarque. La formule de Taylor s'appelle la formule de MacLaurin si $a = 0$.

Def. (Développement limité) $f : E \to F$ une fonction définie au voisinage de $x = a$

S'il existe de nombres $a_0, a_1 \ldots a_n$ tels que $\forall x \in E$, $x \neq a$, on a

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x),$$

où $\varepsilon(x)$ est une fonction telle que $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$,

on dit que f admet un développement limité d'ordre n autour de $x = a$.

(DL)

$P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n$ – la partie principale du développement limité (DL)

$R_n(x) = (x-a)^n \mathcal{E}(x)$ – le reste du DL.

Proposition. Si $f: E \to F$ admet un développement limité d'ordre n autour de $x=a$, alors celui-ci est unique.

Dém: Par absurde. Supposons que

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \mathcal{E}_1(x) \; : \; \lim_{x\to a} \mathcal{E}_1(x) = 0$$

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \dots + b_n(x-a)^n + (x-a)^n \mathcal{E}_2(x) \; : \; \lim_{x\to a} \mathcal{E}_2(x) = 0$$

Soit k le plus petit tel que $a_k \neq b_k$

$$0 = \frac{f(x)-f(x)}{(x-a)^k} = \frac{(a_k-b_k)\cancel{(x-a)^k} + (a_{k+1}-b_{k+1})\overset{(x-a)}{\cancel{(x-a)^{k+1}}} + \dots + \overset{(x-a)^{n-k}}{\cancel{(x-a)^n}}(\mathcal{E}_1(x)-\mathcal{E}_2(x))}{\cancel{(x-a)^k}}$$

$$0 = \underbrace{(a_k-b_k) + (a_{k+1}-b_{k+1})(x-a) + \dots \dots (x-a)^{n-k}(\mathcal{E}_1(x)-\mathcal{E}_2(x))}$$

$x \to a \downarrow \qquad\qquad \downarrow x \to a$

$$0 = a_k - b_k$$

$\Rightarrow$ contradiction $\Rightarrow a_k = b_k \;\; \forall k = 0\dots n \;\Rightarrow\; \mathcal{E}_1(x) = \mathcal{E}_2(x)$ ▨

Corollaire. Soit $a \in I$; $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $(n+1)$ fois continûment dérivable sur I. Alors la formule de Taylor nous fournit le DL d'ordre n de la fonction f autour de $x = a$

Dém: Le reste : $\underbrace{f^{(n+1)}(u) \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}}$ de Taylor

$= \varepsilon(x)(x-a)^n$ - le reste du DL

Il faut vérifier que $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = \lim\limits_{x \to a} f^{(n+1)}(u) \dfrac{(x-a)}{(n+1)!} \overset{??}{=} 0$ oui :)

$\lim\limits_{x \to a} \left| f^{(n+1)}(u) \dfrac{(x-a)}{(n+1)!} \right| \leq \lim\limits_{x \to a} M \left| \dfrac{(x-a)}{(n+1)!} \right| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0 \Rightarrow$ on a obtenu le DL de f autour de $x = a$.

$|f^{(n+1)}(u)| \leq M^{\in \mathbb{R}}$ sur $[a,x]$ ou $[x,a]$

$f^{(n+1)}$ est continue sur $[a,x]$, $[x,a]$

$\blacksquare$

Remarques (1) En fait, il suffit d'avoir f n fois dérivable sur I pour avoir $f(x) = P_n(x)$ de Taylor $+ (x-a)^n \varepsilon(x)$, $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$

(2) $f : E \to F$ peut avoir un DL sans que la formule de Taylor lui soit applicable (Voir [DZ] exemple 6.4.9).

Conclusion. Soit $f : I \to F$ n fois dérivable sur I, $a, x \in I$, $x \neq a$

Alors
$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x)}$$
$\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$

Si f est $(n+1)$ fois dérivable sur I, alors
$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$$
u entre a et x

C'est le DL de la fonction f d'ordre n autour de $x = a$.

Ex. $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x, \quad f^{(k)}(x) = e^x$

$\Rightarrow f^{(k)}(0) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^u}{(n+1)!} x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^u}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Ex. DL pour $f(x) = \frac{1}{1-x}$ d'ordre n autour de $x=0$?
Soit $|x|<1$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Exercice: faire par la formule de Taylor $\left(\frac{1}{1-x}\right)'$, $\left(\frac{1}{1-x}\right)''$ ...

$$\frac{1}{1-x} = \underbrace{1 + x + x^2 + \dots + x^n}_{P_n(x)} + \underbrace{x^{n+1} + x^{n+2} + \dots}_{x^n \mathcal{E}(x)}$$

$$x^n \mathcal{E}(x) = x^{n+1} + x^{n+2} + \dots = x^{n+1}(1 + x + x^2 \dots) = x^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = x^{n+1} \cdot \frac{1}{1-x}$$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \mathcal{E}(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1-x} = 0 \Rightarrow$ On a obtenu le DL de la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$ autour de $x=0$ d'ordre n.

Ex

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + R_{2n+1}(x)$$

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \dots + x^n \mathcal{E}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{3!} + \dots + x^{n-1}\mathcal{E}(x)}{1} = 1$$

Question 21.

$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + t^3\varepsilon(t) \qquad \cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t)$

La limite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2\sin^2(x^2)+1-\cos(x^3)}{(1-\cos x)^3}$ vaut

A. 12

B. 0

C. 24

D. n'existe pas

E. 3

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin^2(x^2)+1-\cos(x^3)}{(1-\cos x)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(x^2-\frac{x^6}{6}+x^6\varepsilon_1(x)\right)^2+1-\left(1-\frac{x^6}{2}+x^6\varepsilon_2(x)\right)}{\left(1-1+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_3(x)\right)^3} =$$

DL :
$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + x^6\varepsilon_1(x)$$
$$\cos(x^3) = 1 - \frac{x^6}{2} + x^6\varepsilon_2(x)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_3(x)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(x^4-\ldots)+\frac{x^6}{2}-\ldots}{\frac{x^6}{8}-\ldots} = \frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}} = 8\cdot\frac{3}{2} = 12$$

Etude des fonctions.

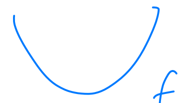
Rappel: Si $f: I \to F$ est dérivable sur I, et f admet un extremum local en $x = c$, alors $f'(c) = 0$.

Proposition. (Condition suffisante pour qu'une fonction ait un extremum local).

Soit $f: I \to F$ une fonction n fois continûment dérivable sur I, où $n \in \mathbb{N}^*$ est pair et telle que $f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$, mais $f^{(n)}(c) \neq 0$.

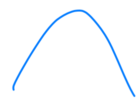
Alors si $f^{(n)}(c) > 0 \Rightarrow f$ admet un min loc en $x = c$

si $f^{(n)}(c) < 0 \Rightarrow f$ admet un max loc en $x = c$



x^2

$f''(0) = 2$



$-x^2$

$f''(0) = -2$

Dém: formule de Taylor d'ordre $(n-1)$ autour de $x = c$

$$f(x) = f(c) + \underbrace{f'(c)(x-c)}_{=0} + \dots + \underbrace{\frac{f^{(n-1)}(c)(x-c)^{n-1}}{(n-1)!}}_{=0} + \frac{f^{(n)}(u)(x-c)^n}{n!}$$

où u est entre x et c.

$$\Rightarrow f(x) = f(c) + \frac{f^{(n)}(u)(x-c)^n}{n!}$$

Supposons que $f^{(n)}(c) > 0$, $f^{(n)}$ est continue

$\Rightarrow f^{(n)}(u) > 0$ (par déf de $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$) $\forall x$ au voisinage suffisamment petit de $x = c$

$$\Rightarrow f(x) - f(c) = \frac{\underbrace{f^{(n)}(u)}_{>0}\overbrace{(x-c)^n}^{\geq 0}}{n!} \geq 0$$

n pair

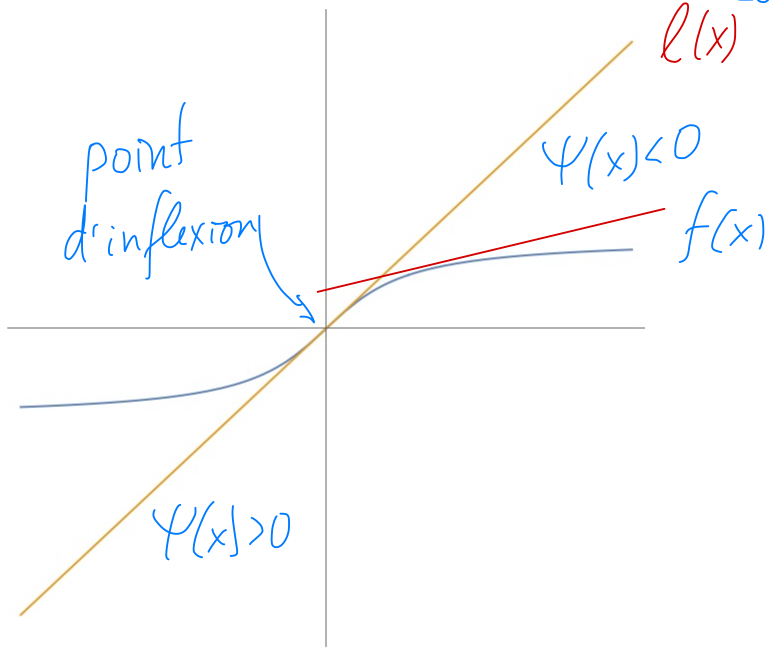
$\Rightarrow f(c)$ est un min loc. ∎

Déf. $f: E \to F$ une fonction dérivable en $a \in E$

Soit $\ell(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ – la tangente à la courbe $y = f(x)$ en $(a, f(a))$.

Considérons $\psi(x) \overset{\text{déf}}{=} f(x) - \ell(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$

Si $\psi(x)$ change de signe en $x = a$, alors $(a, f(a))$ est un point d'inflexion de f.

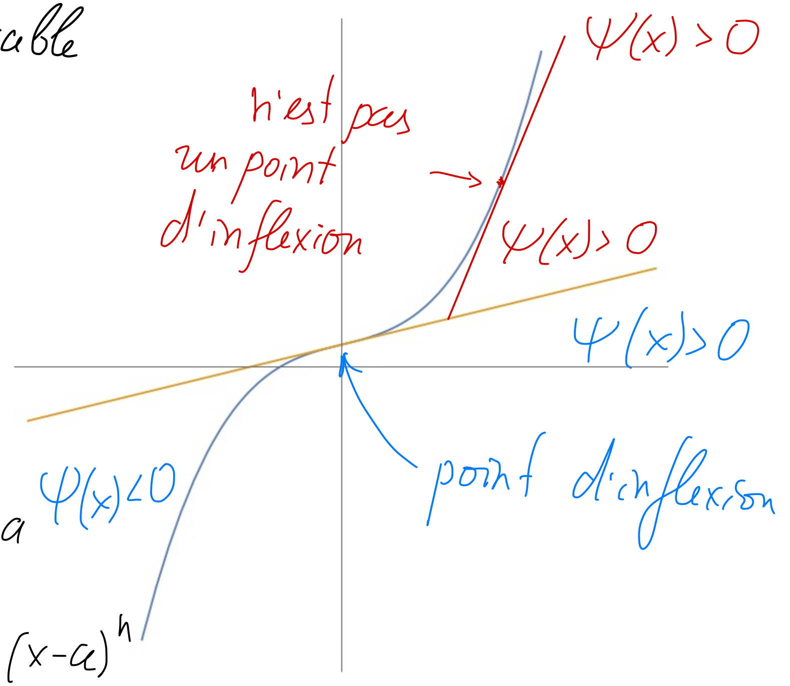


Proposition. (Condition suffisante pour qu'une courbe ait un point d'inflexion).

Soit $f: I \to F$ une fonction n fois continûment dérivable sur I, où $n \in \mathbb{N}$ est impair, $n > 1$, et on a :

$$f''(a) = f'''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0 \; ; \; f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Alors le point $(a, f(a))$ est un point d'inflexion de f.



Dém : Formule de Taylor d'ordre $(n-1)$ autour de $x = a$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \underbrace{+ \qquad +}_{0} + f^{(n)}(u)\,\frac{(x-a)^n}{n!}$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f^{(n)}(u)\,\frac{(x-a)^n}{n!} \qquad \ell(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$\varphi(x) = f(x) - \ell(x) = \cancel{f(a)} + \cancel{f'(a)(x-a)} + f^{(n)}(u)\,\frac{(x-a)^n}{n!} - \cancel{f(a)} - \cancel{f'(a)(x-a)} =$$

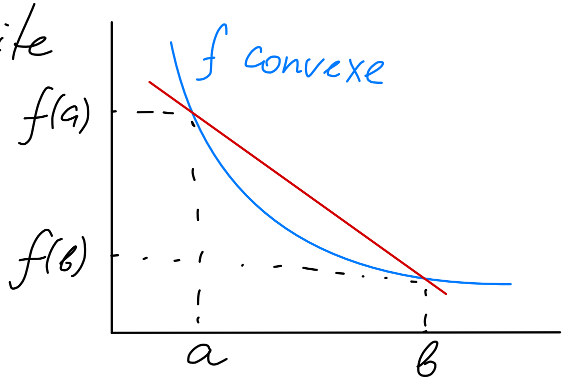
$$\varphi(x) = \underbrace{f^{(n)}(u)}_{\neq 0}\,\frac{(x-a)^n}{n!}$$

$(x-a)^n$: impair, change de signe en $x=a$ $\Rightarrow x=a$ est un point d'inflexion

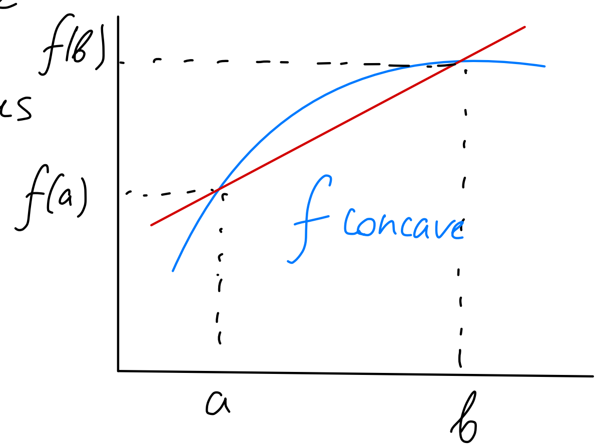
$f^{(n)}(c) \neq 0$, f continue $\Rightarrow f^{(n)}(u) \neq 0$

$\blacksquare$

Déf. $f: I \to F$ est convexe sur I si pour tout couple $a < b \in I$, le graphique de $f(x)$ se trouve au dessous de la droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.



Déf. $f: I \to F$ est concave sur I si pour tout couple $a < b \in I$, le graphique de $f(x)$ se trouve au-dessus de la droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.



Proposition. Soit $f : I \to F$ deux fois dérivable sur I.

Alors f est convexe sur $I \iff f''(x) \geq 0$ sur $I \iff f'(x)$ est croissante sur I

f est concave sur $I \iff f''(x) \leq 0$ sur $I \iff f'(x)$ est décroissante sur I.

Idée: $f''(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f'(x) - f'(x-h)}{h}$,,=''

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \underset{t=-h}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(x) - f(x-h)}{h}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(2\left(\frac{f(x+h) + f(x-h)}{2} - f(x)\right)\right)}{\underbrace{h^2}_{> 0}} > 0 \ \forall x \in I \iff$$

la fonction est convexe

$\iff f''(x) \geq 0$

$f''(x) \geq 0 \ \forall x \in I \iff f$ est convexe sur I.