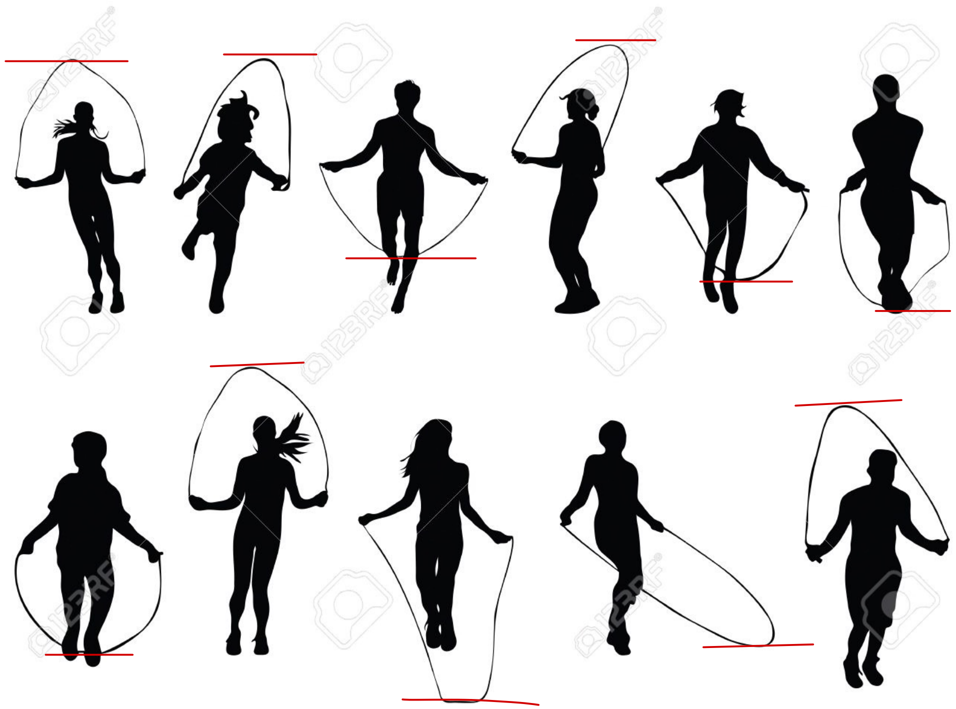
Rappel: Théorème de Rolle. Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to F$ telle que

(1) $f : [a,b] \to F$ est continue

(2) f est dérivable sur $]a,b[$

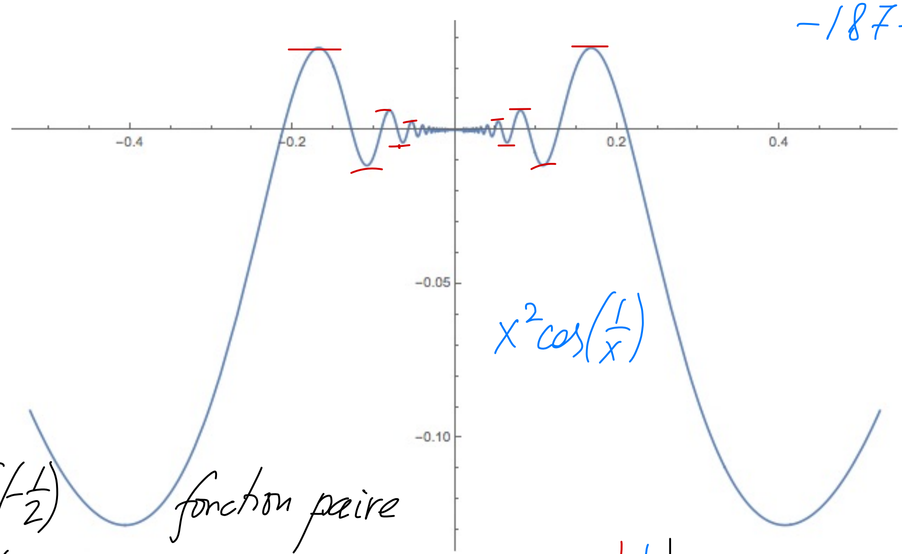
(3) $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow$ Alors il existe au moins un point $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Il existe toujours une tangente horisontale pour une corde suspendue entre deux points de même hauteur

Remarque Si $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable et $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ où $\alpha = \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$ $\Rightarrow$ il existe $c \in]a,b[: f'(c) = 0$.



Ex. $f(x) = \begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$\lim\limits_{x\to 0} \underbrace{x}_{\to 0}{}^2 \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{bornée}} = 0 \Rightarrow f$ est continue sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Si $x \neq 0 \Rightarrow f'(x) = 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \cancel{x^2}\left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) =$

$2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \forall x \neq 0$

$x = 0 \Rightarrow f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{x}_{\to 0}\underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{bornée}} = 0$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right)$ fonction paire

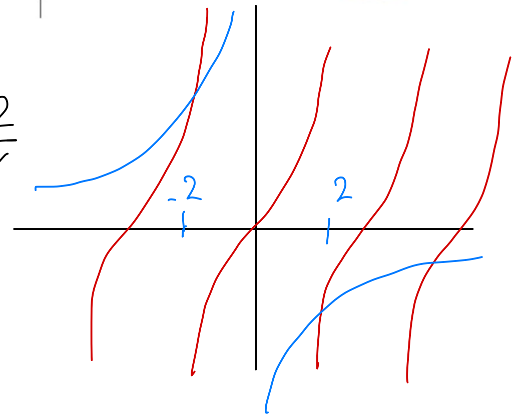
$\Rightarrow$ Thm de Rolle est applicable $\Rightarrow \exists c \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[: f'(c) = 0$

$f'(x) = 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ solutions? $y = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{2}{y}\cos y + \sin y = 0 \underset{\cos y \neq 0}{\Rightarrow} \tan y = -\frac{2}{y}$

$x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\setminus \{0\} \Rightarrow y = \frac{1}{x} \in \left]-\infty, 2\right[\cup \left]2, \infty\right[= D$

$\Rightarrow$ un nombre infini des solutions pour $\tan y = -\frac{2}{y}$ sur D

$\Rightarrow$ un nombre infini des solutions pour $f'(x) = 0$ sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$



Remarque. $f(x)$ est un exemple d'une fonction dérivable sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, mais pas de classe $C^1\left(\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\right)$.

$\left.\begin{array}{ll} \text{Si } x \neq 0 \Rightarrow & f'(x) = 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ \text{Si } x = 0 & f'(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f$ est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$

Si $x \neq 0 \Rightarrow f'(x)$ est continue

Mais $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\underbrace{2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} + \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{n'existe pas!}}\right)$ n'existe pas $\Rightarrow f'(x)$ n'est pas continue en $x = 0$

$\Rightarrow f(x)$ n'est pas de classe $C^1\left(\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\right)$

Théorème des accroissements finis (TAF)

$a < b$; $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que
(1) f est continue sur $[a,b]$
(2) f est dérivable sur $]a,b[$

$\Rightarrow$ Il existe au moins un point $c \in]a,b[$ tel que

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

Remarque : Si $f(a) = f(b) \Rightarrow$ on retrouve le Thm de Rolle.

Dém : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est la pente de la droite passant par $(a, f(a))$ $(b, f(b))$

L'équation de cette droite : $y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

Soit $g(x) \overset{\text{déf}}{=} f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

$g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = 0$

$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}\cancel{(b-a)} = 0$

$\Rightarrow g(a) = g(b) = 0$

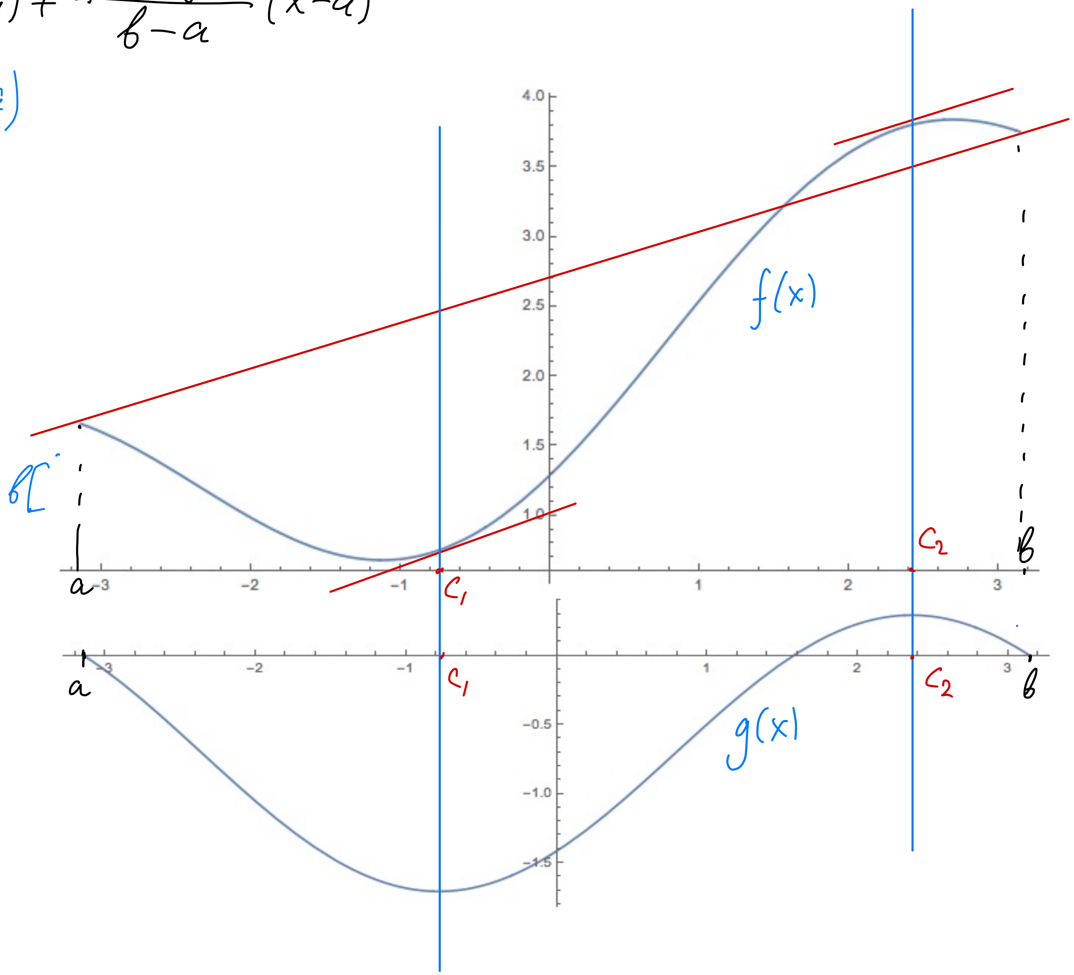
$g(x)$ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$

$\Rightarrow$ le Thm de Rolle s'applique $\Rightarrow$

$\exists c \in]a,b[: g'(c) = 0$

$\Rightarrow g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$

$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ▨



Corollaire 1 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et $f'(x) = 0$ $\forall x \in]a,b[$. Alors f est constante sur $[a,b]$.

Dém: Par contraposée: Supposons que $\exists c_1, c_2 \in]a,b[: f(c_1) \neq f(c_2)$

Par TAF $\exists d \in]c_1, c_2[: f'(d) = \frac{f(c_2) - f(c_1)}{c_2 - c_1} \neq 0$ contradiction avec $f'(x) = 0$ $\forall x \in]a,b[$

$\Rightarrow f$ est constante sur $[a,b]$. ▨

Corollaire 2. Si $f(x)$ et $g(x)$ sont continues $[a,b]$ dérivables sur $]a,b[$ et telles que $f'(x) = g'(x)$ $\forall x \in]a,b[$ $\Rightarrow f(x) = g(x) + \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

Corollaire 3. $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ $\forall x \in]a,b[\Leftrightarrow f$ est croissante (décroissante) sur $]a,b[$

$f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ $\forall x \in]a,b[\Rightarrow f$ est strictement croissante (strictement décroissante) sur $]a,b[$

Dém: (1) $f(x) \uparrow \Rightarrow$ Si $x > c \Rightarrow f(x) \geq f(c)$
$x < c \Rightarrow f(x) \leq f(c)$ $\Rightarrow f'(c) = \lim_{x \to c} \underbrace{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}_{\geq 0} \geq 0$

$\Rightarrow f'(c) \geq 0$ $\forall c \in]a,b[$

(2) Soit $f'(x) \overset{\geq 0}{>} 0$ $\forall x \in]a,b[$. Supposons que $\exists x_1 < x_2 \in]a,b[: f(x_1) \underset{>}{\geq} f(x_2)$

f n'est pas croissante

f n'est pas strictement croissante

$\Rightarrow$ Par TAF $\exists c \in]x_1, x_2[: f'(c) = \frac{\overset{<0 \;\; \leq 0}{f(x_2) - f(x_1)}}{\underset{>0 \;\; >0}{x_2 - x_1}} \leq 0$ contradiction $\Rightarrow f$ est strictement $\uparrow$

< 0 contradiction $\Rightarrow f$ est croissante. ▨

Remarque. Si $f(x)$ est strictement croissante, cela n'implique pas que $f'(x)>0$ $\forall x \in]a,b[$.

Ex. $f(x)=x^3$ sur $]-1,1[$ strictement $\uparrow$, mais $f'(0)=0$.

Ex. Démontrer que l'équation $\ln x + e^x = 0$ a exacement une solution réelle., $x>0$

$f(x)$ est de classe C^∞ sur $]0,\infty[$.

(1) $f(e) = \ln e + e^e = 1 + e^e > 0$

(2) $f(e^{-100}) = \ln e^{-100} + e^{e^{-100}} = -100 + e^{e^{-100}} < 0$ $\Rightarrow$ Par le TVI $\exists$ au moins une solution de $f(x)=0$ sur $]e^{-100}, e[$.

$e^{-100} < 1 \Rightarrow e^{e^{-100}} < e$

Supposons qu'il existe 2 solutions $f(a)=f(b)$; $f(x)$ continue sur $[a,b]$
dérivable sur $]a,b[$

$\Rightarrow$ Par le Thm de Rolle $\exists\ c \in]a,b[: f'(c)=0$.

Par contre, $f'(x) = \frac{1}{x} + e^x$ $\forall x>0$ et $\frac{1}{x}+e^x > 0$ $\forall x>0$

$\Rightarrow$ contradiction $\Rightarrow$ $f(a) \neq f(b)$ $\Rightarrow$ $\exists$ au plus une solution de $f(x)=0$ sur $]0,\infty[$

Finalement, il existe exactement une solution de $f(x)=0$ sur $]0,\infty[$

Théorème. $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ telles que

(1) f, g sont continues sur $[a, b]$

(2) f, g sont dérivables sur $]a, b[$ et $g'(x) \neq 0$ sur $]a, b[$.

$\Rightarrow$ il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\boxed{\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}}$$

[Voir DZ §6.3.1]

§5.4. Règle de Bernoulli-L'Hospital.

Théorème Soient $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $]a, b[$.
$a < b$

Si

(1) $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ sur $]a, b[$

(2) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = \begin{cases} 0 \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$

(3) $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mu \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

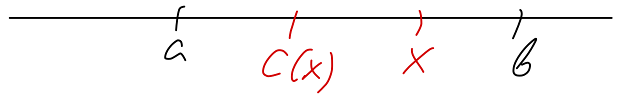
$\Rightarrow \lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \mu$

Idée: On considère le cas $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0$.

Posons $g(a) = f(a) = 0 \Rightarrow f$ et g sont continues à droite en $x = a$

$\Rightarrow$ TAF généralisée sur $[a, x]$ $\forall x \in]a, b[\Rightarrow \exists\, c(x) : a < c(x) < x$

et $\dfrac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \dfrac{f(x) - \overbrace{f(a)}^{=0}}{g(x) - \underbrace{g(a)}_{=0}} = \dfrac{f(x)}{g(x)}$



$X \to a^+ \Rightarrow c(x) \to a^+$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \underbrace{\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}}_{\text{limite existe}} = \mu.$ ∎

<u>Remarques</u>. (1) On peut remplacer $\lim\limits_{x \to a^+}$ par $\lim\limits_{x \to b^-}$ ou $\lim\limits_{x \to \pm\infty}$.

(2) La non-existance de $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ <u>n'implique pas</u> la non-existance de $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

<u>Ex</u>. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 - \frac{\sin x}{x} \to 0}{1 + \frac{\sin x}{x} \to 0} = 1$ mais $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ n'existe pas !

$g'(x) = 1 + \cos x = 0$ si $x = (2k+1)\pi \Rightarrow$ la limite n'existe pas.

BL n'est pas applicable

Aussi, on ne peut pas calculer $\lim\limits_{x \to \infty} \underbrace{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$ par BL $\leadsto \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{-\sin x} = -1$

n'existe pas

Il faut vérifier toutes les condition de BL avant de l'utiliser ; en particulier

(1) $g(x) \neq 0$ et $g'(x) \neq 0$ au voisinage de a

(2) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ existe ; (3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \begin{cases} 0 \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$

Règle de Bernoulli - L'Hospital

$f, g : \{x \in I, x_0 \neq x\} \to \mathbb{R}$ telle que

(1) f, g dérivables sur $I \setminus \{x_0\}$
et $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ sur $I \setminus \{x_0\}$

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \begin{cases} 0 \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \mu \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Aussi pour les limites $x \to \pm\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \mu$

Applications.

Ex 1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$ $\alpha > 0$ $\dfrac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{\alpha} \dfrac{1}{x^\alpha} \underset{\alpha > 0}{=} 0$ $\forall \alpha > 0 \Rightarrow$ Par BL

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha > 0}$$

Ex 2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\overbrace{\ln(1+x)}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to 0}} \overset{BL}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x+1} = 1$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$$

Ex 3. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\cos(2x)\right)^{\frac{3}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{3}{x^2} \ln(\cos(2x))}$

1^∞

On considère $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3}{x^2} \ln(\cos(2x)) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3\ln(\cos(2x))}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$

$g(x) = x^2 \Rightarrow g(x) \neq 0$ au voisinage de 0

$g'(x) = x \Rightarrow g'(x) \neq 0$ au voisinage de 0

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x)$

$\Rightarrow$ BL est applicable si $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mu \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{\cos(2x)}(-\sin(2x))\cdot 2}{2x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin(2x)}{2x}}_{\to 1} \underbrace{\frac{2\cdot 3\cdot(-1)}{\cos(2x)}}_{\to -6} = -6$$

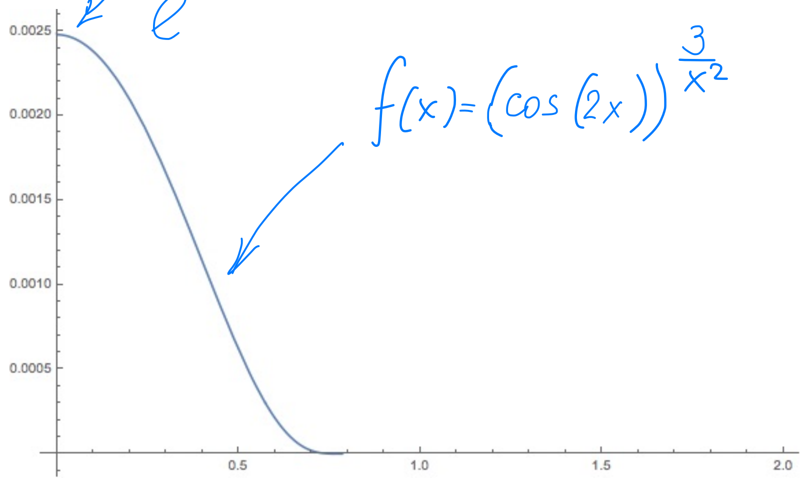
$\Rightarrow$ par BL $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3}{x^2} \ln(\cos(2x)) = -6$

$$(\cos(2x))^{\frac{3}{x^2}} = e^{\frac{3}{x^2}\ln(\cos(2x))} \xrightarrow[x\to 0]{} e^{-6}$$

puisque e^x est continue sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} (\cos(2x))^{\frac{3}{x^2}} = e^{-6} = \frac{1}{e^6}$

$\frac{1}{e^6} \simeq 0.00247875\ldots$



Question 20

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R})$, telle que $f'(x) > 5$ pour tout $x > 0$.

Alors nécessairement

A. $\exists x > 0$ tel que $f(x) = 5$ contre-exemple: $f(x) = 6x + 10$

B $\forall x > 0$ on a $f(x) > f(0) + 5x$ ✓

C. $\forall x > 0$ on a $f(x) > 5f(0)$ contre-exemple: $f(x) = 6x + 10$, $x = 1$

D. $\exists x > 0$ tel que $f(x) = 5 - f(0)$ contre-exemple: $f(x) = 6x + 10 \neq -5$, $x > 0$

E. $\forall x > 0$ on a $f(x) - 5x > 0$ contre-exemple: $f(x) = 6x - 1$, $x = \frac{1}{2}$

TAF: $\forall x > 0$ $\exists t$ tel que $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(t)$ et $t \in]0, x[\Rightarrow t > 0$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(0)}{\underbrace{x - 0}_{> 0}} = f'(t) > 5 \Rightarrow f(x) - f(0) > 5x \Rightarrow f(x) > f(0) + 5x \quad \forall x > 0.$$