

Analyse I

Section IN

Automne 2025

Prerequis.

Identités algébriques

Polynomiales:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

Exponentielles: a, b nombres réels positifs; x, y nombres réels. n naturel positif

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(ab)^x = a^x b^x$$

$$a^0 = 1$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$a^1 = a$$

Logarithmiques:

$\ln = \log_e$
logarithme naturel

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$\ln(x^c) = c \ln x$$

$$\ln(1) = 0$$

x, y réels positifs
 c réel -2-

$$\log_a(a) = 1$$

$a > 0$

§ 0.2 Trigonométrie

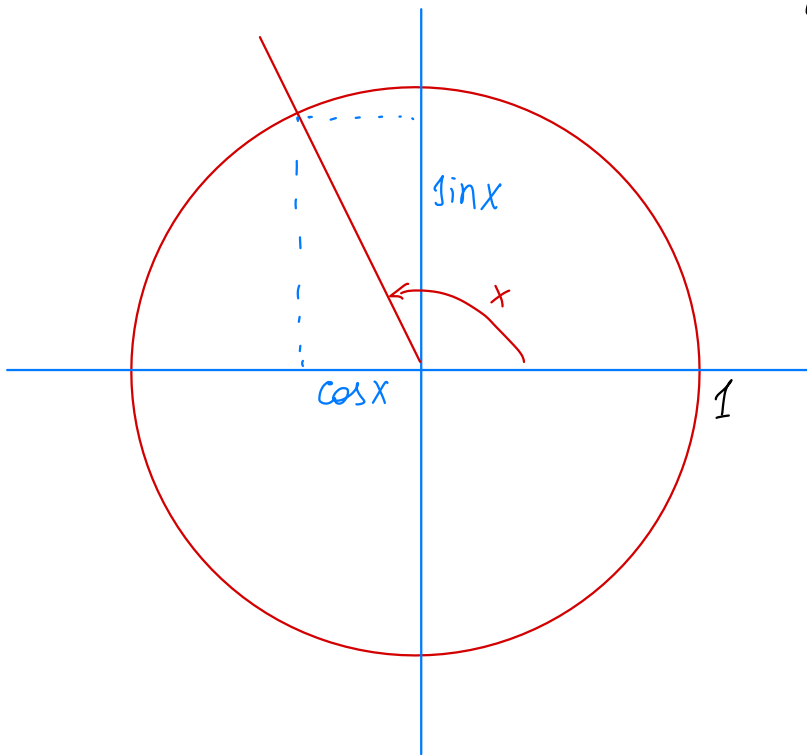
$\sin x, \cos x$ pour tout x réel

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\cos x \neq 0$$

$$\sin x \neq 0$$



$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

↙

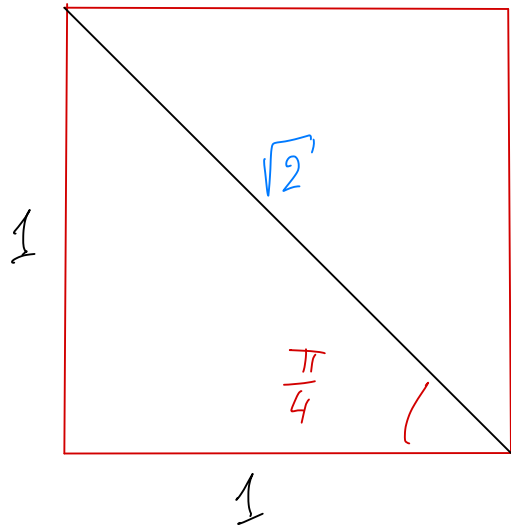
$$1 = \cos 0 = \cos(x-x) = \cos^2 x + \sin^2 x$$

$$\sin 2x = \sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x$$

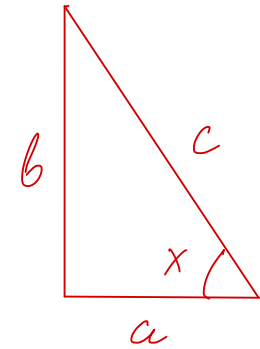
$$\cos 2x = \cos(x+x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Valeurs de $\cos x$, $\sin x$ pour $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, 0 \dots$

-3-

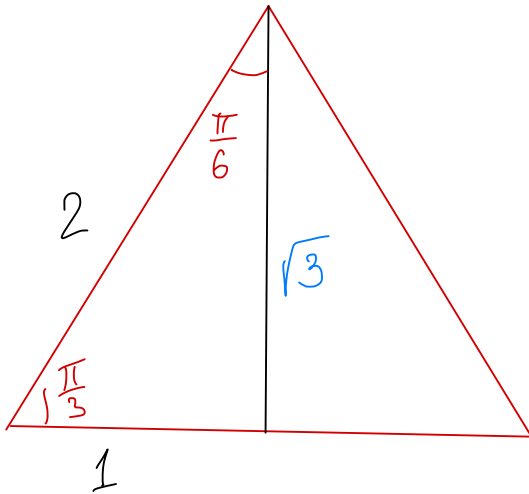


$$\Rightarrow \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\sin x = \frac{b}{c}$$

$$\cos x = \frac{a}{c}$$



triangle équilatéral de côté = 2

$$\Rightarrow \sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Types des fonctions élémentaires

(1) Polynomiales $f(x) = 8x^5 + 3x^2 + 1$

→ linéaire $f(x) = ax + b$ a, b réels

∩ → quadratiques $f(x) = ax^2 + bx + c$ a, b, c réels $a \neq 0$

(2) Fonctions rationnelles

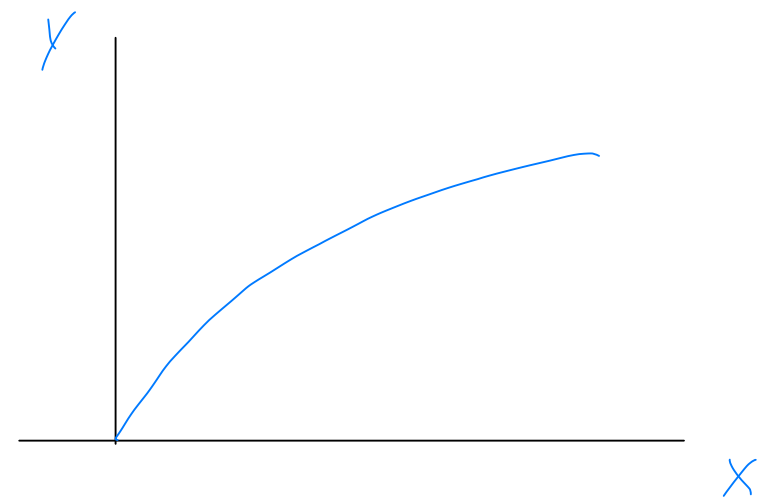
∩ $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes $Q(x) \neq 0$
 $f(x) = \frac{3x+2}{5x^2+1}$

(3) Fonctions algébriques

Toute fonction qui est une solution d'une équation polynomiale

Ex: $f(x) = \sqrt{x}$
 $x \geq 0$

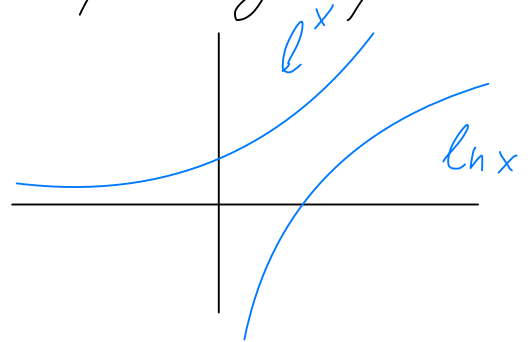
$$(f(x))^2 = x$$



(4) Fonctions transcendantes (= fonctions qui ne sont pas algébriques)

(4a) Fonction exponentielles et logarithmiques

$f(x) = e^x$ $g(x) = \ln(x)$, $x > 0$
log de base e

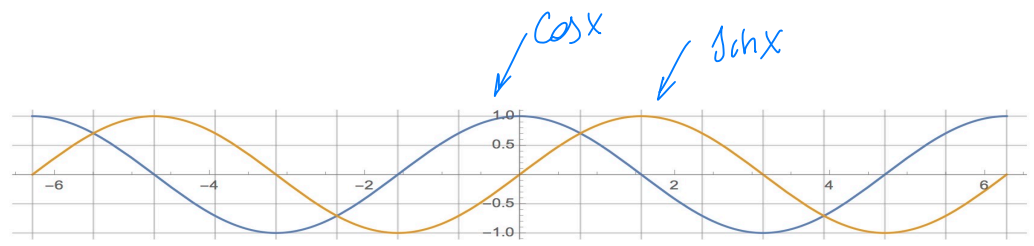


Pour tout x réel $\ln(e^x) = x$
Pour tout $x > 0$ $e^{\ln x} = x$ } e^x et $\ln x$ sont des fonctions réciproques

(4b) Fonctions trigonométriques (et leurs réciproques)

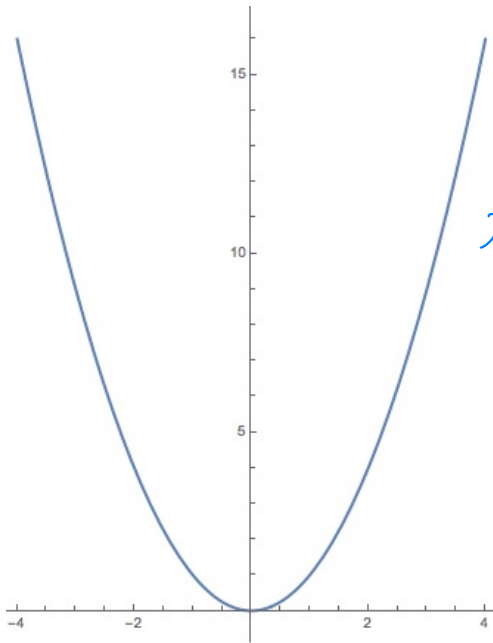
$f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$

$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$



§0.6. Transformations des graphiques.

Ex. $f(x) = x^2$

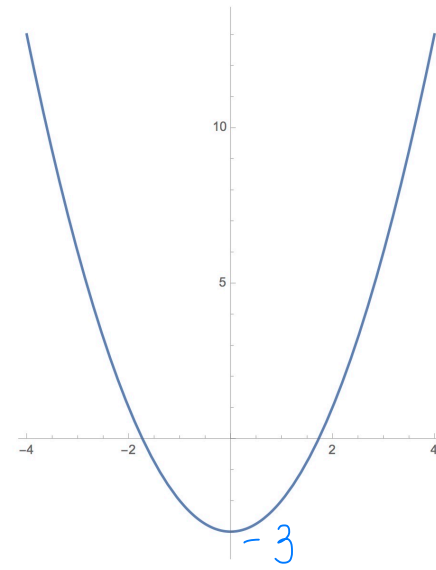


$f(x) = x^2$ descendre le graphique
de $f(x) = x^2$ par 3

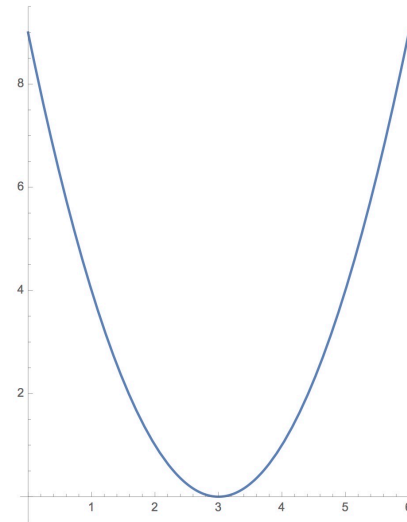
deplacer le graphique
de $f(x) = x^2$ à droite par 3

$$f(x) = x^2 - 3$$

-6-

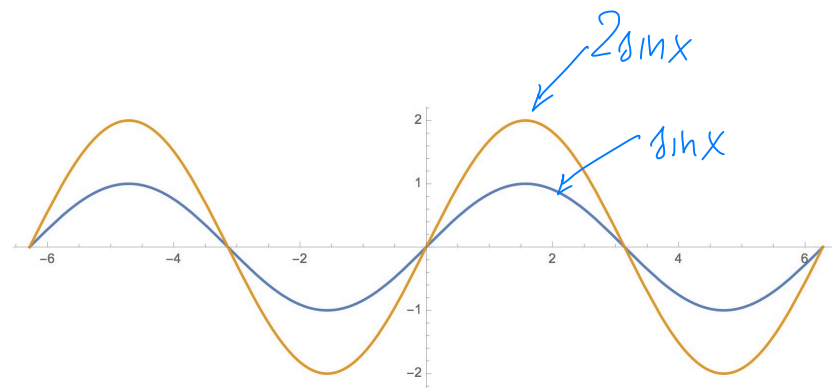


$$f(x) = (x-3)^2$$



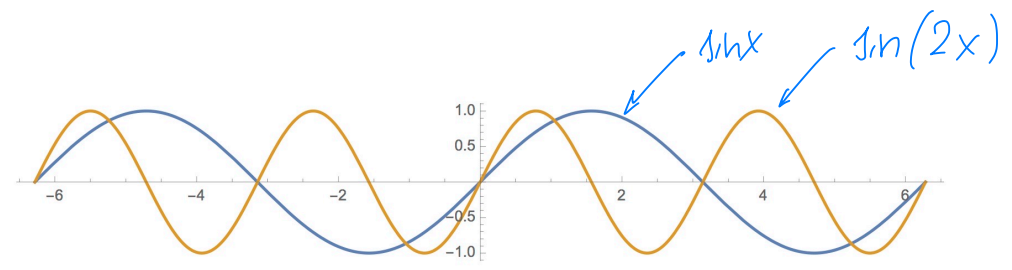
Ex. $f(x) = 2\sin x$

Étirer le graphe
de $f(x) = \sin x$
en direction verticale
 $2 > 1$

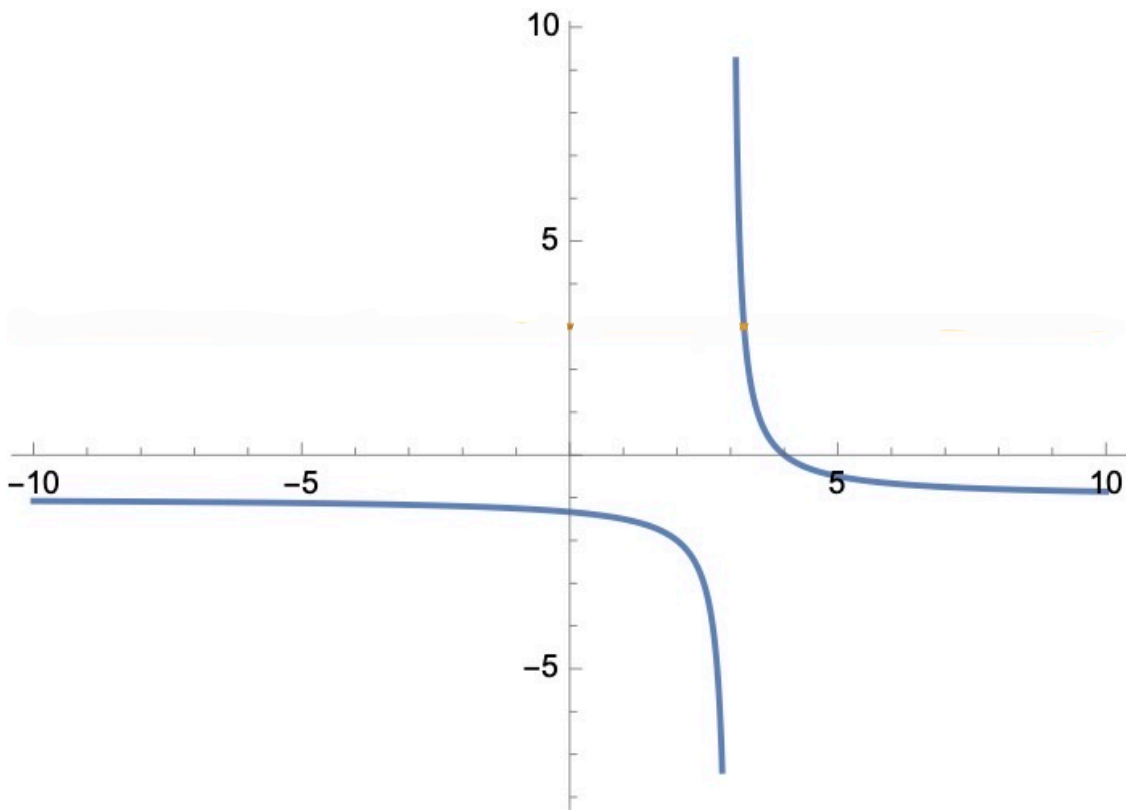


Ex $f(x) = \sin(2x)$

Contracter le graphe
de $f(x) = \sin x$
en direction horizontale
 $2 > 1$



Question 1 Quelle est la fonction sur le graphe?



A. $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$ ← asymptote verticale en $x = -3$

B. $f(x) = \frac{1}{x^2-9} - 1$ ← deux asymptotes vert.

C. $f(x) = \frac{x+2}{x-3} = \frac{x-3+5}{x-3} = 1 + \frac{5}{x-3}$
← asymptote horizontale en $y = 1 > 0$

D. $f(x) = \frac{1}{x-3} - 1$

E. $f(x) = \frac{1}{x+3} - 1$ ← asymptote vert. en $x = -3$

Fonctions injectives, surjectives, bijectives

-8-

Déf $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \text{ est bien définie}\} = \underline{\text{le domaine de définition de } f}$

$f(D) = \{y \in \mathbb{R} : \text{il existe } x \in D(f) \text{ tel que } f(x) = y\} = \underline{\text{l'ensemble image de } f}$

Soient E, F deux ensembles de nombres réels. Alors

Déf (f surjective) $f: E \rightarrow F$ est surjective si pour tout $y \in F$ il existe au moins un $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Déf (f injective) $f: E \rightarrow F$ est injective si pour tout $y \in F$ il existe au plus un $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

ou: pour tout couple $x_1, x_2 \in D_f$ tels que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Déf (f bijective) Si $f: E \rightarrow F$ est injective et surjective, alors elle est bijective.

Fonctions réciproques

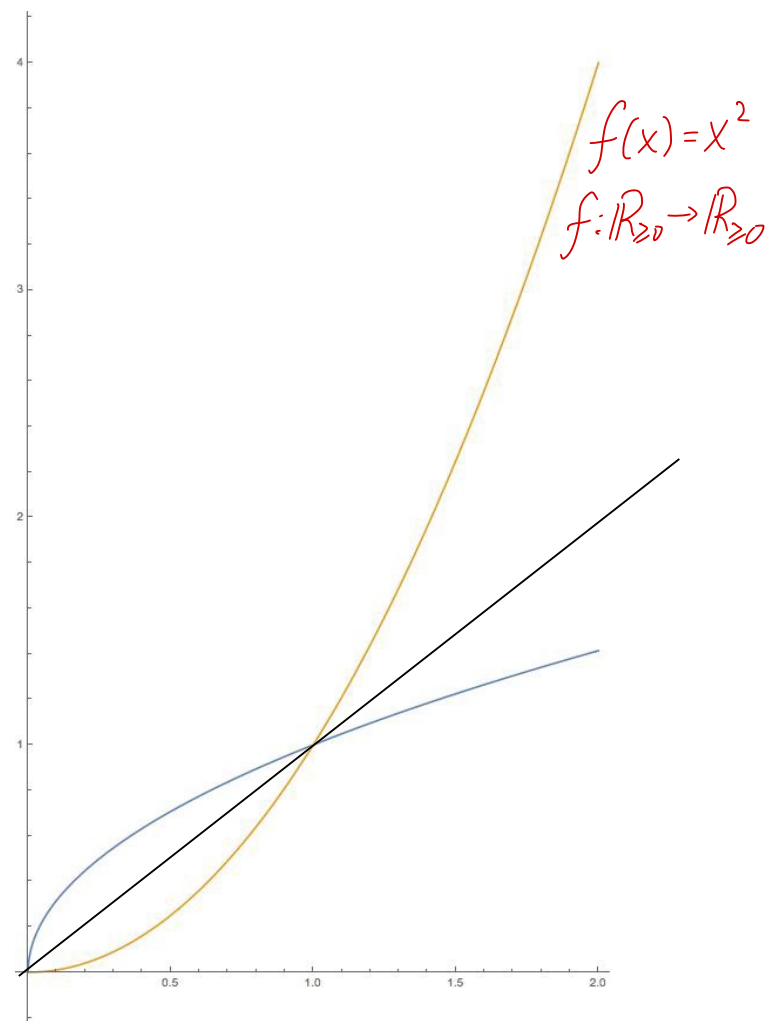
-9-

Déf Pour $f: E \rightarrow F$ bijective on définit la fonction réciproque $f^{-1}: F \rightarrow E$ par la formule $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$
 $x \in E, y \in F$

Ex 1 $f(x) = x^2 : f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ est bijective
 \Rightarrow la fonction réciproque est bien définie

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} : f^{-1}: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Les graphiques sont symétriques
par rapport à la droite $y=x$



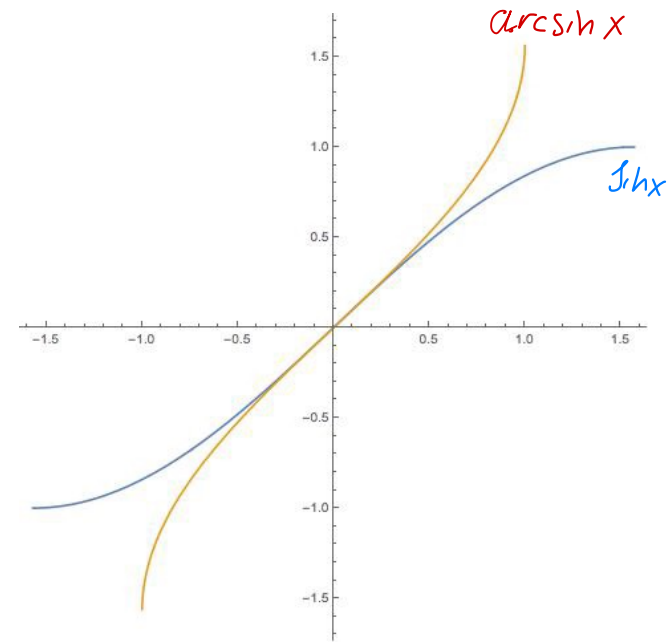
Si la fonction n'est pas bijective, on coupe son domaine de définition (et son ensemble d'arrivée) pour obtenir une fonction bijective. -10-

Ex 2. $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ bijective

← convention

$$y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y$$

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

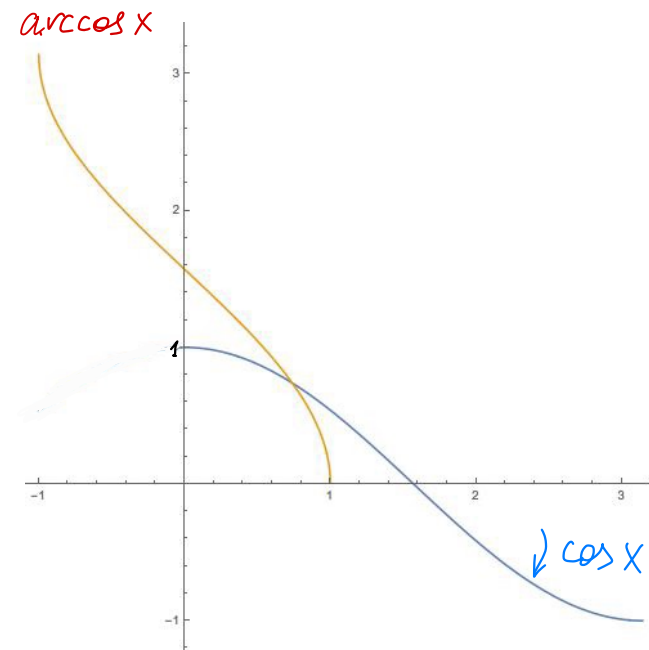


Ex 3. $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ bijective

← convention

$$y = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos y$$

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$



Fonctions composées

Soit $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$
telles que $f(D_f) \subset D_g \Rightarrow$ on peut définir la fonction composée

$g \circ f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ par la formule $g \circ f(x) = g(f(x))$
En général $g \circ f \neq f \circ g$

Ex 1. $f(x) = x - 2$ $g(x) = \cos^2 x \Rightarrow g \circ f(x) = (\cos(x-2))^2$
 $f \circ g(x) = \cos^2 x - 2$

Ex 2 $f(x) = \sqrt{x}$ $\Rightarrow f \circ f \circ f(x) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}} = \sqrt{\sqrt{x}^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{x^{\frac{1}{4}}} = x^{\frac{1}{8}}$
 $x \geq 0$ $= \sqrt[8]{x}$