Rappel:

$$(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0) \quad f,g \text{ dérivables en } x_0$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \quad g(x) \neq 0 \text{ au voisinage de } x_0$$

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0) \quad g \text{ dérivable en } f(x_0),\ f \text{ dérivable en } x_0$$

$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$; $(x^n)' = n x^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$
sur leurs domaines.

Aujourd'hui :
(1) derivée de la fonction réciproque
(2) fonctions a^x, $\log_a x$, x^r
(3) derivée logarithmique
(4) fonctions hyperboliques
(5) derivée d'ordre superieur
(6) Théorème de Rolle

Derivée de la fonction réciproque.

Proposition. Soit $f: I \to F$ une fonction bijective continue sur I et derivable en $x_0 \in I$, telle que $f'(x_0) \neq 0$. Alors la fonction réciproque $f^{-1}: F \to I$ est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{où} \quad y_0 = f(x_0) \ ; \ x_0 = f^{-1}(y_0).$$

Dém: f est continue et biective sur $I \Rightarrow f^{-1}$ est continue et bijective

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))} = \left[\begin{array}{l} \text{changement de variables} \\ x_0 = f^{-1}(y_0),\ x = f^{-1}(y) \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{l} f^{-1}(y) \text{ est continue en } y_0 \\ \text{Si } y \to y_0 \Rightarrow f^{-1}(y) = x \to f^{-1}(y_0) = x_0 \end{array}\right] = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\exists f'(x_0) \neq 0 \ \to\ f'(x_0)}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

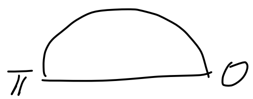
$\blacksquare$

Corollaire. Si $f : I \to F$ et $f^{-1} : F \to I$ sont deux fonctions réciproques continues sur leurs domaines et dérivables à l'intérieur, alors pour tout x à l'intérieur de F, tel que $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, a

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}} = \left.\frac{1}{f'(y)}\right|_{y = f^{-1}(x)}$$

Ex. $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$, $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$; $y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$

$$(\arccos x)' = \left.\frac{1}{\cos'(y)}\right|_{y = \arccos x} = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ sur }]-1, 1[$$

$\sin y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y}$; $0 \le \arccos x \le \pi$ 

$\Rightarrow \sin(\arccos x) > 0 \Rightarrow$ il faut choisir $+$

Rappel:

$$\boxed{(e^x)' = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

$f(x) = e^x$ est continue, bijective, monotone $\overset{\text{cours 18}}{\Longrightarrow}$ $\exists f^{-1}(x) = \ln x : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est continue, bijective, monotone

Ex. $f^{-1}(x) = \ln x$, $x>0$; $f(y) = e^y$

$$(\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'}\Big|_{y=\ln x} = \frac{1}{e^y}\Big|_{y=\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} \quad \forall x>0$$

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \forall x>0}$$

Remarque. On peut définir les fonctions $\underline{a^x \stackrel{\text{déf}}{=} e^{x\ln a}}$ $\forall x\in\mathbb{R}$, $a>0$, $a\neq 1$

$\Rightarrow y = e^{x\ln a} \Leftrightarrow \ln y = x\cdot\ln a \Leftrightarrow \underline{x = \frac{\ln y}{\ln a} \stackrel{\text{déf}}{=} \log_a y}$ $\forall y\in\mathbb{R}_+^*$, $a>0$, $a\neq 1$

$\Rightarrow \underline{(a^x)'} = \ln a\, e^{x\ln a} = \underline{a^x\cdot\ln a}$

$\underline{(\log_a x)'} = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \underline{\frac{1}{x\ln a}}$

$a^x : \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$

$\log_a x : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

Si $r=n \Rightarrow$ $e^{n\ln x} = e^{\ln(x^n)} = x^n$

Soit $r\in\mathbb{R}$. Alors $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}_+^*$ $\underline{f(x) = x^r \stackrel{\text{déf}}{=} e^{r\ln x}}$ est la fonction puissance

$\Rightarrow \underline{(x^r)'} = (e^{r\ln x})' = e^{r\ln x}\cdot\frac{r}{x} = \underline{r\,x^{r-1}}$

(Si $r=n$, $n\in\mathbb{N}^*$ $\Rightarrow (x^n)' = n\,x^{n-1}$)

La dérivée logarithmique.

Question: $(x^x)' = ?$

Soit $f(x) = f_1(x)^{f_2(x)} \Rightarrow f'(x) = ? \Rightarrow \underline{f_1(x)^{f_2(x)}} \overset{déf}{=} e^{\ln\left(f_1(x)^{f_2(x)}\right)} = \underline{e^{f_2(x)\cdot \ln(f_1(x))}}$

$f_1(x) > 0.$

$$\left(f_1(x)^{f_2(x)}\right)' = \left(e^{f_2(x)\cdot\ln(f_1(x))}\right)' = \underbrace{e^{f_2(x)\ln f_1(x)}}_{f_1(x)^{f_2(x)}}\underbrace{\left(f_2'(x)\cdot \ln f_1(x) + f_2(x)\frac{f_1'(x)}{f_1(x)}\right)}_{\left(\ln f_1(x)^{f_2(x)}\right)'}$$

$$\boxed{\left(f_1(x)^{f_2(x)}\right)' = \left(f_1(x)^{f_2(x)}\right)\cdot\left(f_2(x)\cdot\ln(f_1(x))\right)'}$$

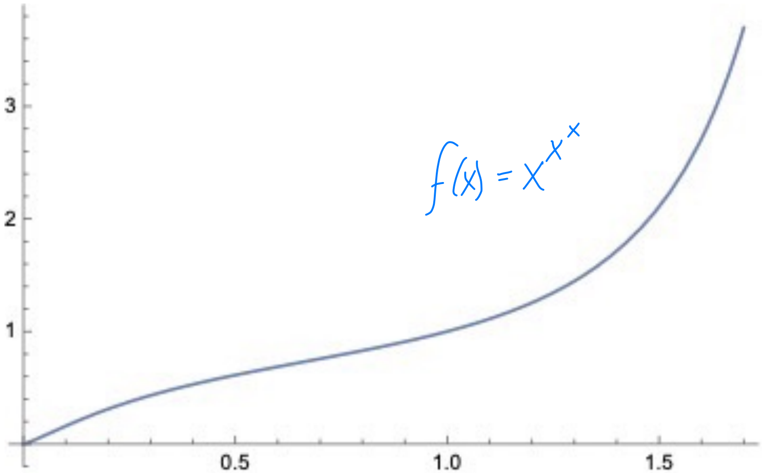
$f_1(x) > 0$

Supposons que $\ln f(x)$ est bien défini

Alors $(\ln f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow \boxed{f'(x) = f(x)\cdot(\ln f(x))'}$

Ex: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$; $f(x)\cdot(\ln f(x))' = x^n\cdot(n\cdot\ln x)' = x^n\cdot\dfrac{n}{x} = n x^{n-1} = f'(x)$ ☺
$x > 0$

Ex. $f(x)=x^{x^x},\ x>0 \Rightarrow f'(x)=?$ $\quad f_1(x)=x$, $\quad f_2(x)=x^x$



$$x^{x^x} \overset{\text{déf}}{=} e^{\ln x^{x^x}} = e^{x^x\cdot \ln x} = e^{(e^{x\cdot\ln x})\cdot \ln x}$$

$$x^x \overset{\text{déf}}{=} e^{\ln x^x} = e^{x\cdot \ln x}$$

$$(x^{x^x})' = \left(e^{(e^{x\ln x})\cdot\ln x}\right)' =$$

$$= e^{(e^{x\ln x})\cdot \ln x}\cdot\left(e^{x\ln x}\cdot\left(\ln x+\frac{x}{x}\right)\cdot\ln x + e^{x\ln x}\cdot\frac{1}{x}\right) =$$

$$\underbrace{e^{(e^{x\ln x})\cdot\ln x}}_{x^{x^x}}\cdot\underbrace{e^{x\ln x}}_{x^x}\left(\ln^2x+\ln x+\frac{1}{x}\right) = x^{x^x}\cdot x^x\left(\ln^2 x+\ln x+\frac{1}{x}\right)$$

$$(x^x)'=(e^{x\ln x})' = e^{x\ln x}(x\cdot\ln x)' = \underbrace{e^{x\ln x}}_{x^x}\left(\ln x+\frac{x}{x}\right) = x^x(\ln x+1)$$

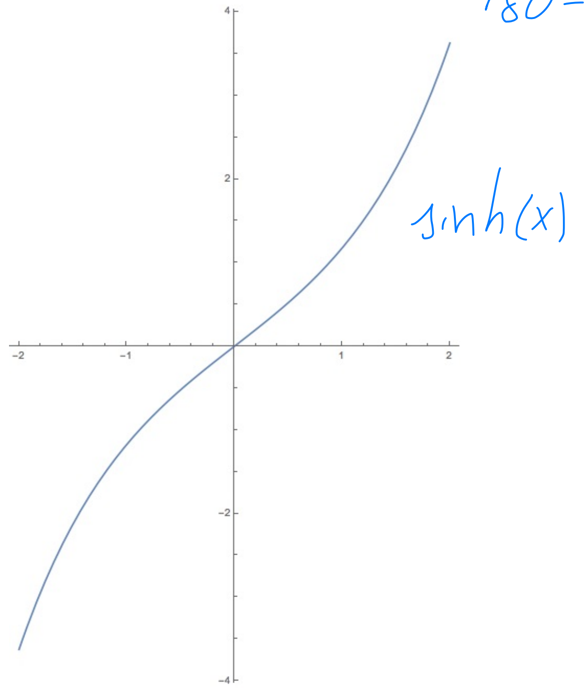
Fonctions hyperboliques

Déf.

$$\boxed{\begin{aligned} \sinh x &\overset{\text{déf}}{=} \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \\ \cosh x &\overset{\text{déf}}{=} \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \end{aligned}}$$

impaire $\forall x \in \mathbb{R}$

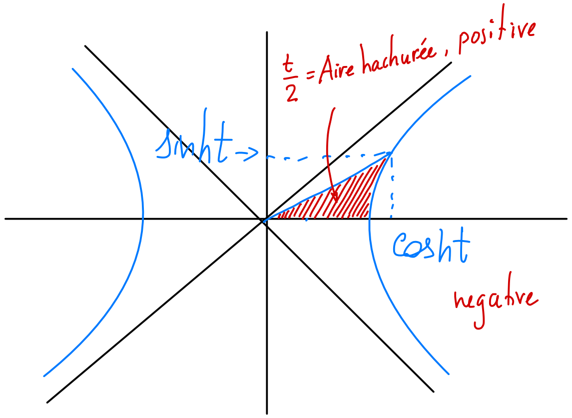
paire $\forall x \in \mathbb{R}$



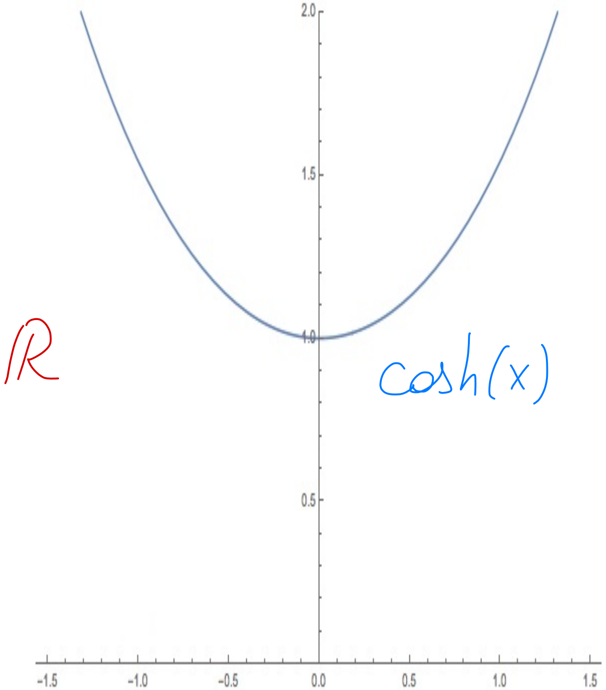
(Rappel : $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$)

$$(\sinh x)' = \cosh x \quad ; \quad (\cosh x)' = \sinh x$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{4} = 1$$

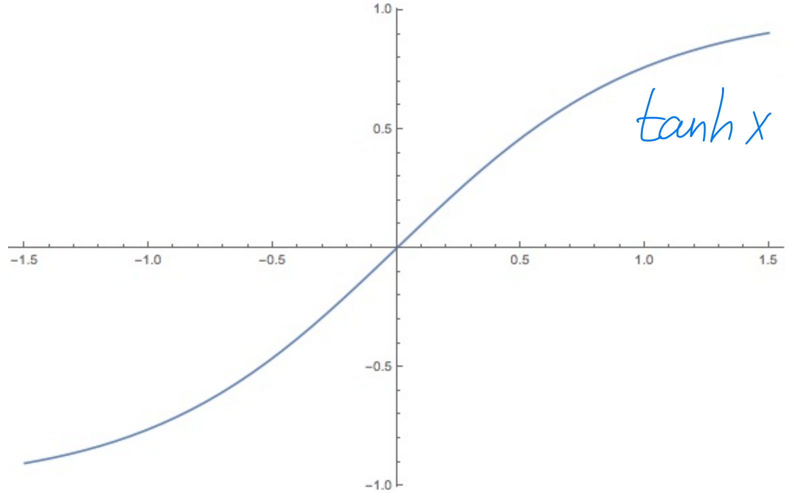


$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

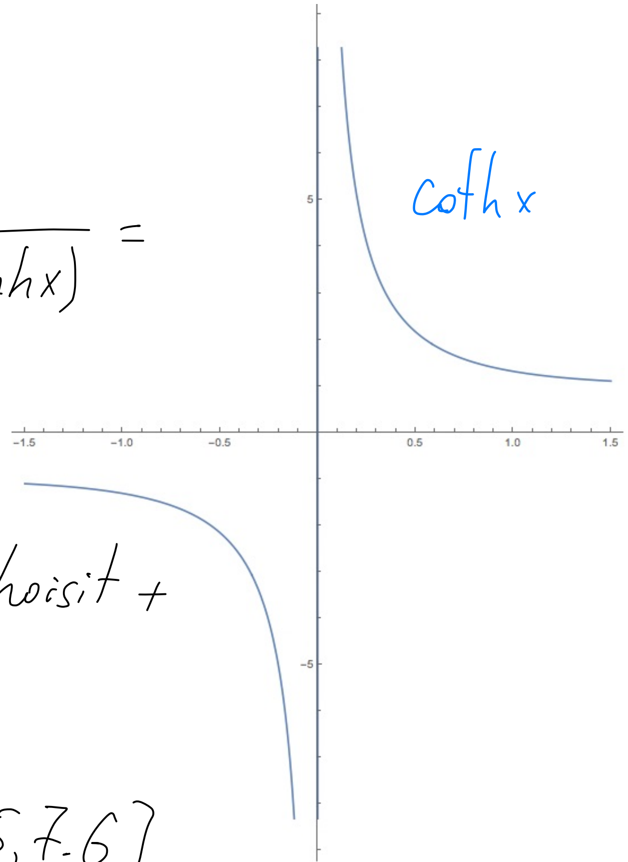


$$\tanh x \overset{\text{déf}}{=} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$-1 < \tanh x < 1$$



$$\coth x \overset{\text{déf}}{=} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$



On peut définir des fonctions réciproques :
„Argument sinus hyperbolique", ...

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Bijective

$$y = \sinh x \iff x = \operatorname{arsinh} y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{(\sinh(y))'} = \frac{1}{\cosh(y)}\bigg|_{y=\operatorname{arsinh} x} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh} x)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{arsinh} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$\cosh y = \pm\sqrt{1+\sinh^2 x}$ puisque $\cosh y > 0 \ \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow$ on choisit $+$

$$(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Voir [DZ § 7.5, 7.6]

Déf $f''(x) \overset{\text{déf}}{=} (f'(x))'$ dérivée d'ordre 2.

$f^{(n)}(x) \overset{\text{déf}}{=} (f^{(n-1)}(x))'$ dérivée d'ordre n. Notation : $f^{(n)}(x)$

Ex. $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$, $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$, $f^{(n)}(x) = n!$

$f^{(n+1)}(x) = 0$ Exercice: démontrer par récurrence

Déf. $f: E \to F$ est n fois dérivable si elle admet une dérivée d'ordre n.

Déf. $f: E \to F$ est de classe $C^n(E)$ si elle admet une dérivée d'ordre n qui est continue sur E.

„ n fois continûment dérivable "

Ex $f(x) = \sin x$ est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$

$\sin x$ est de classe $C^\infty(\mathbb{R})$

Polynôme $\in C^\infty(\mathbb{R})$

$f(x) = |x| \in C^0(\mathbb{R})$ seulement continue

Propriétés des fonctions dérivables

Proposition. Si $f : E \to F$ dérivable en $x_0 \in E$, telle que f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$

Dém: Soit $f(x_0)$ un max local de f. Alors $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x$ dans un voisinage de x_0

$$\exists\, f'(x_0) = f'_d(x_0) = \underbrace{\lim_{x \to x_0^+} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{> 0}}}_{\leq 0} = f'_g(x_0) = \underbrace{\lim_{x \to x_0^-} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{< 0}}}_{\geq 0} = 0.$$

$\blacksquare$

Remarque. La reciproque est fausse. $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \big|_{x=0} = 0$ mais la fonction n'a pas d'extremum local en $x = 0$.

Déf. Si $f : E \to F$ est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 0$, on dit que x_0 est un point stationnaire de f.

Les point d'extrema d'une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont parmi les suivants:

- (1) les points stationnaires : $f'(x_0) = 0$
- (2) les points où $f'(x)$ n'existe pas dans $]a, b[$
- (3) les points limites $x = a$, $x = b$

Théorème de Rolle.

Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to F$, telle que

(1) $f : [a,b] \to F$ est continue

(2) f est dérivable sur $]a,b[$

(3) $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow$ Alors il existe au moins un point $c \in]a,b[$ tel que $\underline{f'(c) = 0}$.

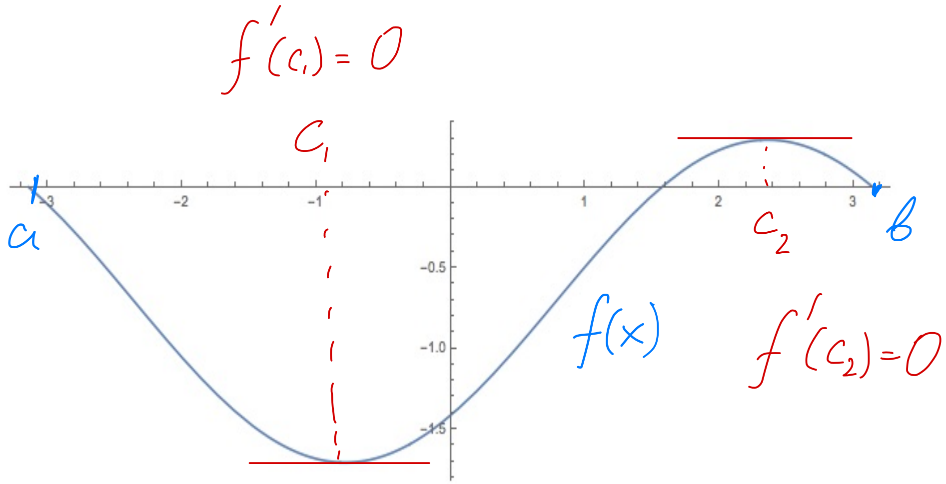
Dém: (1) Si $f : [a,b] \to F$ est constante

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{=0}}{x - x_0} = 0 \quad \forall x_0 \in]a,b[.$$

(2) Si $f : [a,b] \to F$ n'est pas constante

$$\Rightarrow \exists\, z_1, z_2 \in [a,b] : f(z_1) = \min f(x)$$

$$f(z_2) = \max f \qquad f(z_1) \neq f(z_2)$$



Puisque $f(a) = f(b) \Rightarrow$ au moins un entre z_1 et z_2 est dans $]a,b[$

Supposons que $z_1 \in]a,b[\Rightarrow f'(z_1) = 0$ parce que f est dérivable sur $]a,b[$ et z_1 est un point d'extremum local.

$$\Rightarrow \text{on pose } c = z_1 \Rightarrow f'(c) = 0, \quad c \in]a,b[$$

$\blacksquare$

Ex. (Application Thm de Rolle): Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞, telle que $f(0) = f(4) = 0$ et $f'(0) = f'(4) = 0$.

Montrer qu'il existe au moins 2 solutions de l'équation $f''(x) = 0$ sur $]0,4[$.

(1) $f(0) = f(4)$, Thm Rolle sur $[0,4] \Rightarrow \exists\, c \in]0,4[: \; f'(c) = 0$

(2) $f'(0) = f'(c) = 0$ Thm Rolle pour $f'(x)$ sur $[0,c] \Rightarrow \exists\, d \in]0,c[:$
$f''(d) = 0$

(3) $f'(c) = f'(4) = 0$ Thm Rolle pour $f'(x)$ sur $[c,4] \Rightarrow \exists\, h \in]c,4[:$
$f''(h) = 0$.

$$\Rightarrow \exists\, d \neq h \in]0,4[$$
$$f''(d) = f''(h) = 0.$$

Question 19

Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} 1+\dfrac{\ln(1+x\sqrt{x})}{x}, & x>0 \\ 1, & x=0 \\ e^{\sin x}, & x<0 \end{cases}$

Alors f est

A. continûment dérivable sur $\mathbb{R}$

B. dérivable, mais pas continûment dérivable sur $\mathbb{R}$

C. dérivable à gauche, mais pas à droite en $x=0$

D. dérivable à droite, mais pas à gauche en $x=0$

E. dérivable à droite et à gauche en $x=0$, mais n'est pas dérivable en $x=0$

F. n'est pas continue en $x=0$

$$\lim_{x\to 0+}\left(1+\underbrace{\frac{\ln(1+x\sqrt{x})}{x\sqrt{x}}}_{\to 1}\underbrace{\frac{\cancel{x}\sqrt{x}}{\cancel{x}}}_{\to 0}\right) = 1 = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0-} e^{\sin x} = e^0 = 1 = f(0)$$

f est continue en $x=0$

$$f_g'(0) = \lim_{x\to 0-}\frac{e^{\sin x}-1}{x} = \lim_{x\to 0-}\underbrace{\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}}_{\to 1}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} = 1 \Rightarrow f_g'(0)=1$$

$$f_d'(0) = \lim_{x\to 0+}\frac{1+\frac{\ln(1+x\sqrt{x})}{x}-1}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+x\sqrt{x})}{x^2} = \lim_{x\to 0+}\underbrace{\frac{\ln(1+x\sqrt{x})}{x\sqrt{x}}}_{\to 1}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{\to +\infty} = +\infty$$

n'est pas dérivable à droite.

f est dérivable à gauche, mais pas à droite en $x=0$.