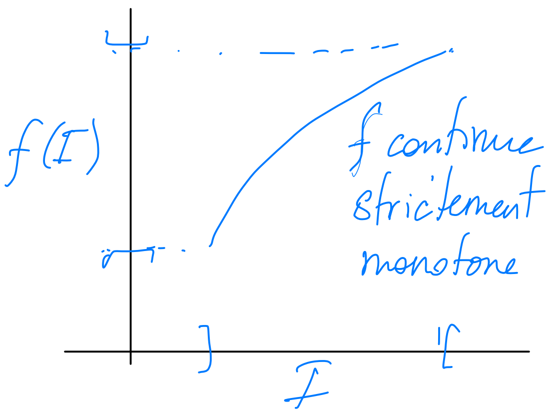
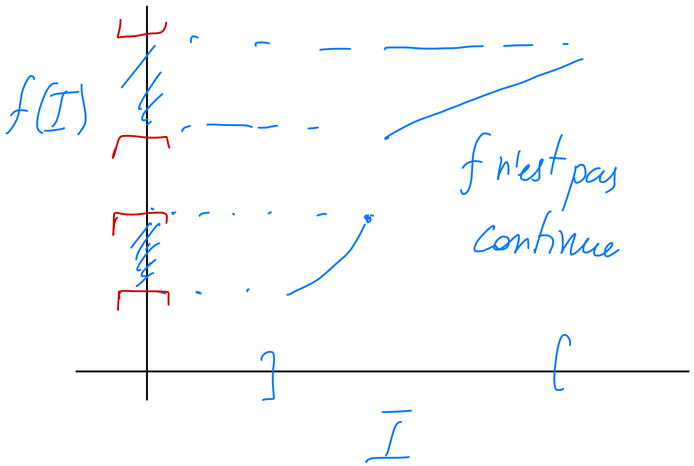
Rappel: Théorème de la valeur intermédiaire: Une fonction continue sur un intervalle fermé borné atteint son sup, son inf, et toute valeur comprise entre les deux TVI

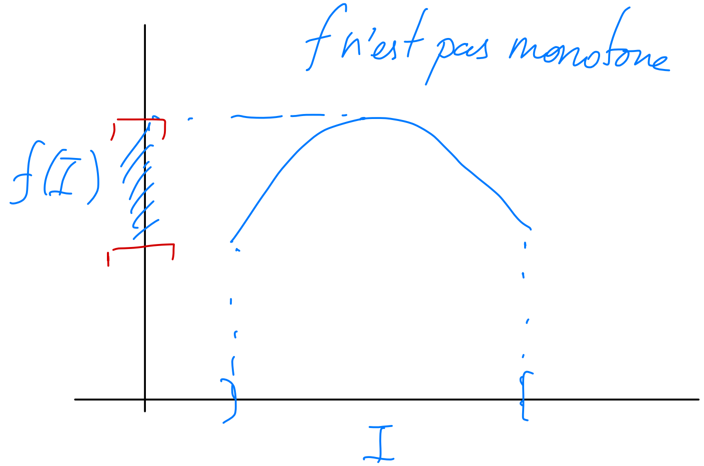
$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continue, $a<b$ $\Rightarrow$ $\forall c \in [\min_{[a,b]} f(x), \max_{[a,b]} f(x)]$, il existe au moins un $x_0 \in [a,b] : f(x_0) = c$.

Corollaire 1. Soit $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, $a<b$, une fonction continue, telle que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Alors il existe au moins un $c \in]a,b[\; : f(c) = 0$.

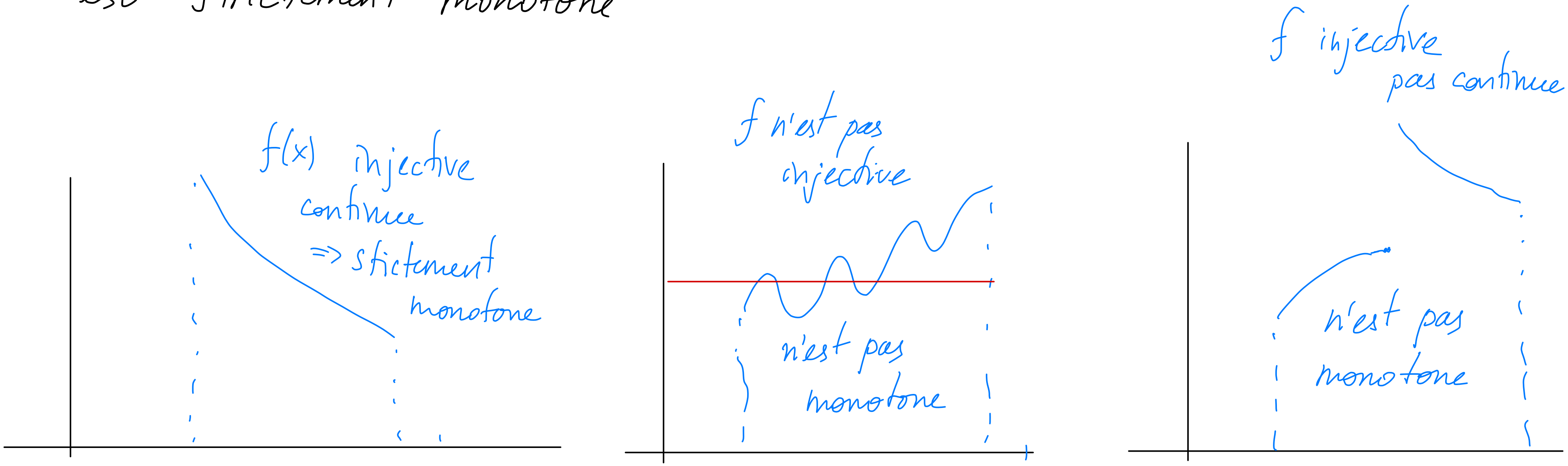
Corollaire 2. Soit I un intervalle ouvert; $f: I \to \mathbb{R}$ fonction continue strictement monotone. Alors $f(I)$ est un intervalle ouvert.







Corollaire 3. Toute fonction injective et continue sur un intervalle est strictement monotone



Corollaire 4. Toute fonction bijective continue sur un intervalle admet une fonction réciproque qui est continue et strictement monotone

[DZ, §5.3]

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & < & x_2 & \Longleftrightarrow & f(x_1) & < & f(x_2) \\ \| & & \| & & \| & & \| \\ f^{-1}(y_1) & < & f^{-1}(y_2) & \Longleftrightarrow & y_1 & < & y_2 \end{array}$$

$f \uparrow$ strictement

$\Rightarrow f^{-1} \uparrow$ strictement

Chapitre 5. Calcul différentiel

Fonctions dérivables

Déf. Une fonction $f : E \to F$ est dite dérivable en $x_0 \in E$ s'il existe la limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{(\text{déf})}{=} f'(x_0) \in \mathbb{R}$

Cette limite est appelée la dérivée de f en x_0, notée $f'(x_0)$.

Ex 1. $f(x) = x^2$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{(x - x_0)}(x + x_0)}{\cancel{x - x_0}} = 2x_0$$

$$\boxed{(x^2)' = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

Ex 2. $f(x) = \cos x$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\cos(x_0 + (x - x_0)) - \cos x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\cos x_0 \cos(x - x_0) - \sin x_0 \sin(x - x_0) - \cos x_0}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{-\sin x_0 \cdot \sin(x - x_0)}{x - x_0} + \frac{\cos x_0 \left(\cos(x - x_0) - 1\right)}{x - x_0} \right] = \lim_{x \to x_0} \left[-\sin x_0 \underbrace{\frac{\sin(x - x_0)}{x - x_0}}_{\to 1} + \cos x_0 \underbrace{\frac{\left(-2\sin^2\left(\frac{x - x_0}{2}\right)\right)}{\left(\frac{x - x_0}{2}\right)^2}}_{\to -2} \cdot \underbrace{\frac{\left(\frac{x - x_0}{2}\right)^2}{x - x_0}}_{\to 0} \right] =$$

$$\cos(x - x_0) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x - x_0}{2}\right)$$

$$= -\sin x_0$$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

Exercice: $(x^3)' = 3x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $(\sin x)' = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ à partir de la déf.

Remarque. Si f est dérivable en $x = x_0$, on peut écrire

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + r(x) \quad \text{où} \quad r(x) \overset{\text{déf}}{=} f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)$$

Alors $r(x)$ est telle que $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \Big(\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)} - f'(x_0) \Big) = 0$

$\Rightarrow$ Toute fonction dérivable en $x = x_0$ admet une présentation

Déf $f(x) = f(x_0) + \underset{\in \mathbb{R}}{a} \cdot (x-x_0) + r(x)$ où $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x-x_0} = 0.$ définition de f différentiable en $x = x_0$

Dans ce cas on dit que f est différentiable en x_0.

Réciproquement, si $f(x) = f(x_0) + a(x-x_0) + r(x)$, t.q. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x-x_0} = 0$, alors

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{f(x_0)} + a(x-x_0) + r(x) - \cancel{f(x_0)}}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \Big[\frac{a \cancel{(x-x_0)}}{\cancel{x-x_0}} + \underbrace{\frac{r(x)}{x-x_0}}_{\to 0} \Big] = a = f'(x_0)$$

Alors f est différentiable en $x = x_0 \iff f$ est dérivable en $x = x_0$ et $f'(x_0) = a$.

Fonction dérivée : Si $f : E \to F$ est dérivable sur un ensemble $D(f') \subset E$, alors on définit la fonction dérivée : $f' : D(f') \to \mathbb{R}$

$$x \to f'(x)$$

$f(x)$	$f'(x)$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
x^2	$2x$
x^n	$n x^{n-1}$ $\quad n \in \mathbb{N}^*$

Interpretation géométrique de f'

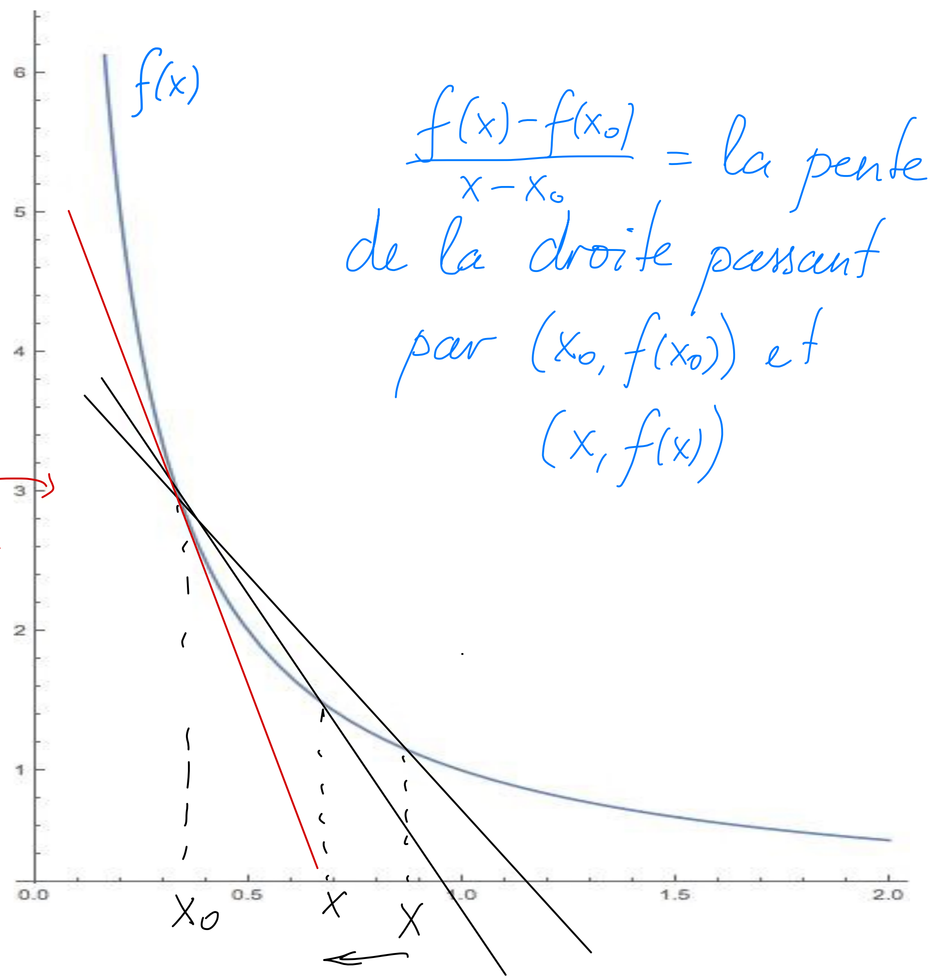
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est la pente de la tangente à la courbe $y=f(x)$ au point $(x_0, f(x_0))$

Équation de la tangente

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

droite tangente la courbe $y=f(x)$ en $x=x_0$



$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ = la pente de la droite passant par $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$

Proposition. Une fonction dérivable en $x=x_0$ est continue en $x=x_0$

Dém: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x_0)+(f(x)-f(x_0))\right) = \lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x_0)+\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)\in\mathbb{R}}\underbrace{(x-x_0)}_{\to 0}\right) = f(x_0)$ $\boxed{/\!/\!/}$

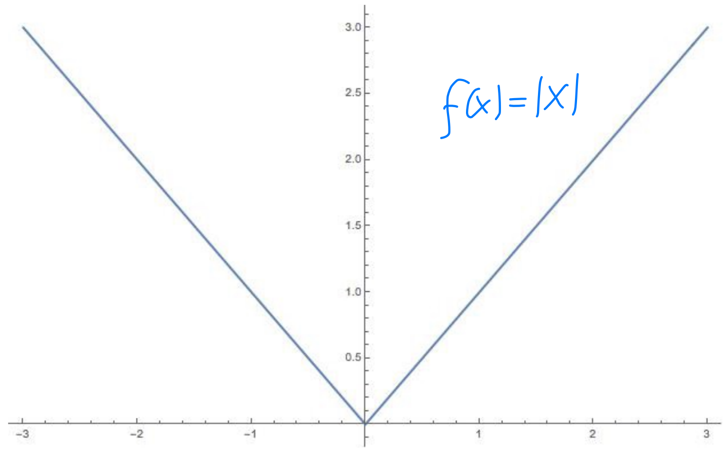
La réciproque est fausse:

Ex. $f(x)=|x|$ est continue en $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0+}|x| = \lim\limits_{x\to 0+} x = 0$; $\lim\limits_{x\to 0-}|x| = \lim\limits_{x\to 0-}(-x) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$

Mais la dérivée de f en $x=0$ n'existe pas.



$$\begin{cases} f_d'(0) = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{|x|-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x}{x} = 1 \\ f_g'(0) = \lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{|x|-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{-x}{x} = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow f_d'(0) \neq f_g'(0)$

$\Rightarrow f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ n'existe pas.

Déf La dérivée à droite:

$$f_d'(x_0) \overset{\text{déf}}{=} \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

La dérivée à gauche:

$$f_g'(x_0) \overset{\text{déf}}{=} \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$\exists f'(x_0) \Leftrightarrow \exists f_d'(x_0),\ \exists f_g'(x_0)$ et $f_g'(x_0) = f_d'(x_0)$.

Remarque. On peut introduire la dérivée infinie si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$

(f n'est pas dérivable en $x = x_0$)

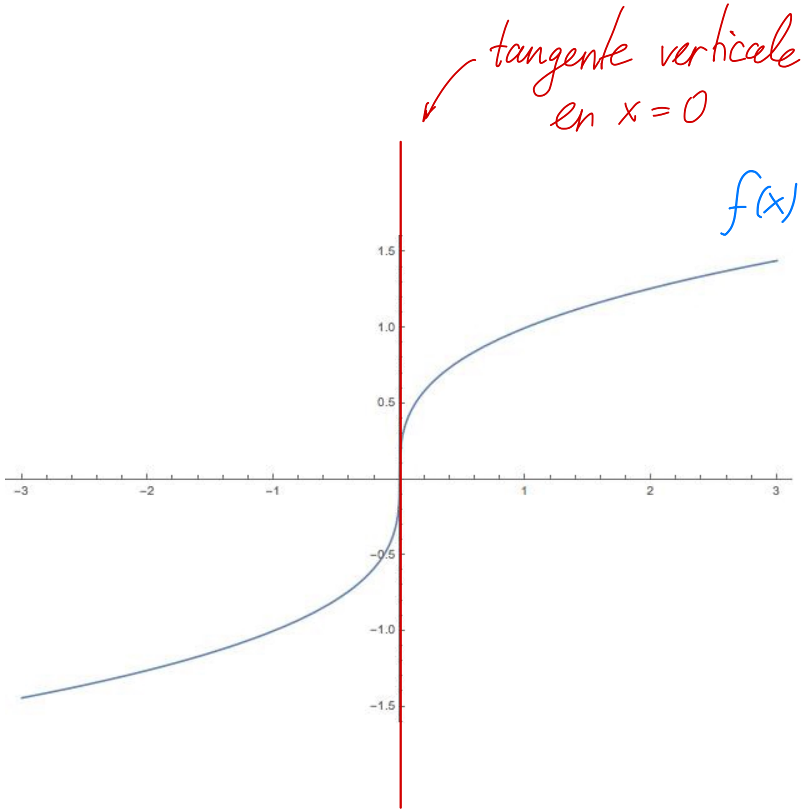
Dans ce cas le graphique de f admet une tangente verticale en x_0.

Ex. $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{|x|}, & x < 0 \end{cases}$

$$f'_d(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0} = \lim_{x \to 0+} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^{2/3}} = +\infty$$

$$f'_g(0) = \lim_{x \to 0-} \frac{-\sqrt[3]{-x}-0}{x-0} \underset{y=-x}{=} \lim_{y \to 0+} \frac{-y^{\frac{1}{3}}}{-y} = \lim_{y \to 0+} \frac{1}{y^{2/3}} = +\infty$$

$$\Rightarrow f'(0) = +\infty$$



Opérations algébriques sur les dérivées. Soient $f, g : E \to F$ deux fonctions dérivables en $x = x_0$

Alors: (1) $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(2) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

(3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) g(x_0) - g'(x_0) f(x_0)}{g^2(x_0)}$ si $g(x) \neq 0$ au voisinage de x_0.

Dém: (1) exercice (voir [DZ])

On va démontrer $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\dfrac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ $(g(x_0) \neq 0)$ Alors (2) $\Rightarrow$ (3)

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{(x - x_0) g(x) g(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0}}_{\to -g'(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{1}{g(x) \cdot g(x_0)}}_{\to \frac{1}{g^2(x_0)}} = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

(2) $$(fg)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\underbrace{\frac{(f(x) - f(x_0))}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} \underbrace{g(x)}_{\to g(x_0)} + f(x_0) \underbrace{\frac{(g(x) - g(x_0))}{x - x_0}}_{\to g'(x_0)} \right] = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$$

$\blacksquare$

Ex 1. $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow$ $\boxed{(x^n)' = n x^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

Dém: par récurrence: Soit $P(n) \nearrow$

Ancrage: $n = 1$ $\quad (x)' = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \ \forall x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow (x)' = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Hérédité: Supposons que $(x^n)' = n x^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

Considérons $(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' \overset{(2)}{=} (n x^{n-1}) \cdot x + x^n \cdot 1 = n x^n + x^n = (n+1) x^n$

Alors par récurrence, la proposition $(x^n)' = n x^{n-1}$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ex 2. $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\Rightarrow$ par la propriété (3) on a

$$(\tan x)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \forall x : x \in D(\tan)$$

$\Leftrightarrow \cos x \neq 0$

$$\boxed{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

sur son domaine de définition

Proposition Dérivée de la fonction composée des deux fonctions dérivables.

$f : E \to F$ dérivable en $x = x_0 \in E$, $g : G \to H$ dérivable en $f(x_0)$, $f(E) \subset G$

Alors $\exists\ (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Dém: $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0}$

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \begin{cases} \overbrace{\dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}}^{\to g'(f(x_0))} \cdot \overbrace{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}^{\to f'(x_0)} & \text{si } f(x) \neq f(x_0) \\ 0 = g'(f(x_0)) \cdot \underbrace{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{= 0} & \text{si } f(x) = f(x_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

$\blacksquare$

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)}$$

La dérivée de $f(x) = e^x$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{e^{x_0+x-x_0} - e^{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} e^{x_0} \frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0} = e^{x_0}.$$

$$\frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0} \xrightarrow{x\to x_0} 1$$

$$\boxed{(e^x)' = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

$\Rightarrow f(x) = e^x$ est dérivable $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, f est strictement croissante

$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$; $f: \mathbb{R} \xrightarrow[\text{monotone}]{\text{continue}}]0, +\infty[$ surjective
intervalle ouvert.

$\Rightarrow f = e^x: \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ bijective et continue. ($\Rightarrow \ln x:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est bijective, strictement croissante et continue)

Ex 3. $f(x) = e^{2x^2+\sin x} \Rightarrow f'(x) = e^{2x^2+\sin x}(4x+\cos x)$

Ex 4. $g(x) = \dfrac{\sin x}{e^x+e^{-x}} \Rightarrow g'(x) = \dfrac{\cos x\cdot(e^x+e^{-x}) - (e^x-e^{-x})\sin x}{(e^x+e^{-x})^2}$

Question 18

Soit $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right)+2\sin^2 x}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Alors

A $f'(0) = 3$

B f n'est pas dérivable en $x=0$

C $f'(0) = 1$

D $f'(0) = 0$

E $f'(0) = -1$

$$\cos\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x^2 \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} - \sin x^2 \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} = -\sin x^2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x^2 + 2\sin^2 x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} -\underbrace{\left(\frac{\sin x^2}{x^2}\right)}_{\to 1} \underbrace{x}_{\to 0} + \underbrace{2\sin x}_{\to 0}\underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}_{\to 1} = 0 \Rightarrow f \text{ est continue en } x=0$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\sin x^2+2\sin^2 x}{x} - 0}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x^2 + 2\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} -\underbrace{\left(\frac{\sin x^2}{x^2}\right)}_{\to 1} + 2\underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}_{\to 1}^2 = 1$$