

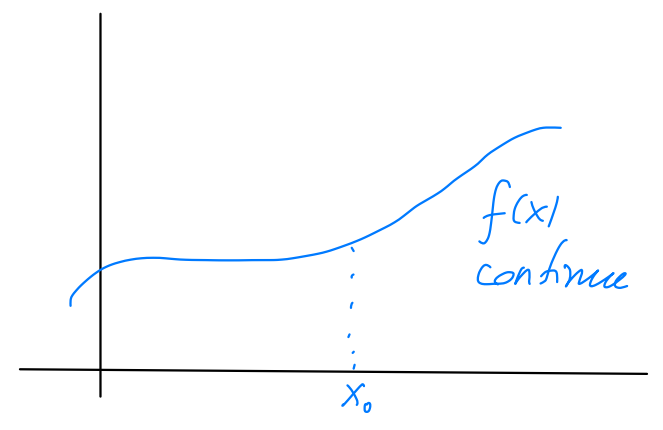
Rappel:

§4.4. Fonctions continues.

Déf Une fonction $f: E \rightarrow F$ est continue en un point $x_0 \in E$ si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

3 condition de continuité de f en $x = x_0$

- $f(x_0)$ existe
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ existe
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$



Tout polynôme, toute fonction rationnelle, $\sin x$, $\cos x$, $\sqrt[x]{x}$, e^x , $\ln x$, \tan , $\cot x$ sont continues sur leurs domaines.


Critère de Cauchy pour les fonctions continues.

$f: E \rightarrow F$ définie au voisinage de $x = x_0$ et en x_0 . Alors f est continue en $x = x_0$ \iff si et seulement si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in \{x \in E : |x - x_0| \leq \delta\} \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \epsilon$.

Dém: (\Rightarrow) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \forall x, x_2 : \begin{matrix} |x_1 - x_0| \leq \delta \\ |x_2 - x_0| \leq \delta \end{matrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

(\Leftarrow) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : \left\{ \begin{matrix} x \in E : |x - x_0| \leq \delta \\ |x_0 - x_0| = 0 \leq \delta \end{matrix} \right\} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \stackrel{\text{d'if}}{\Leftrightarrow}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 

Déf $f: E \rightarrow F$ est dite continue à droite (à gauche) en $x_0 \in E$ si

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ (resp. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$).

continue à droite continue à gauche

Remarque. f est continue en $x = x_0 \Leftrightarrow$ elle est continue à gauche et à droite en x_0

Ex. $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geq 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & x < 0 \end{cases}$ Étudier la continuité de f en $x=0$.

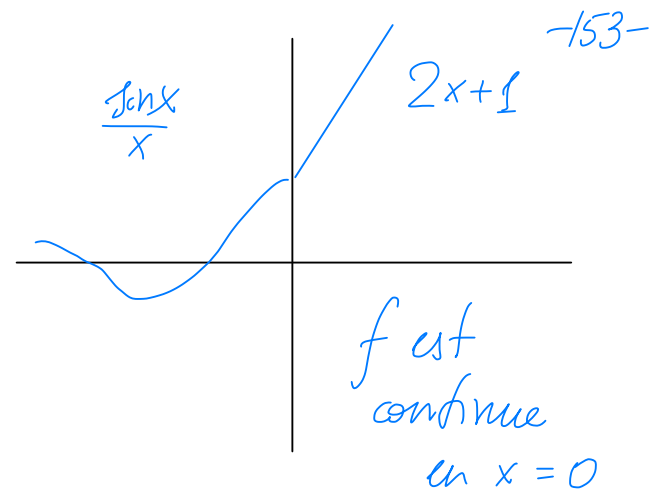
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x+1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$f(x) \Big|_{x=0} = 2x+1 \Big|_{x=0} = 1$$

$\Rightarrow f(x)$ est continue en $x=0$

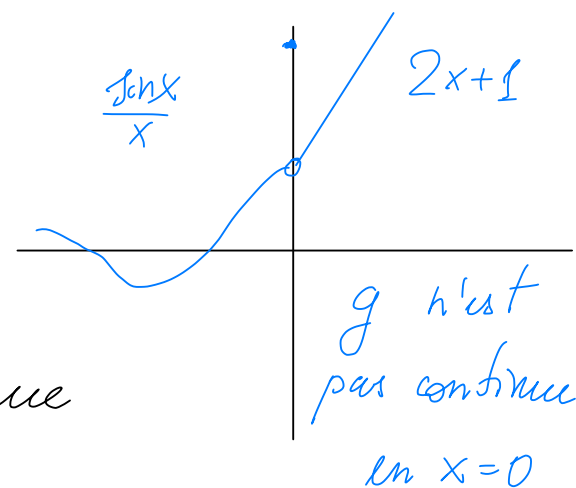


Ex

$$g(x) = \begin{cases} 2x+1, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

Mais $g(0) = 2 \neq \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \Rightarrow g$ n'est pas continue en $x=0$



Opérations sur les fonctions continues.

Si f et g sont continues en $x = x_0$, alors

(1) $\alpha f + \beta g$ est continue en $x = x_0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(2) $f \cdot g$ est continue en $x = x_0$

(3) $\frac{f}{g}$ est continue en $x = x_0$ si $g(x_0) \neq 0$

(4) Si $f: E \rightarrow F$ et $g: G \rightarrow H$, $f(E) \subset G$, et f est continue en $x_0 \in E$ g est continue en $f(x_0) \in G$. Alors $(g \circ f)$ est continue en x_0 .

Ex. $f(x) = \frac{\sqrt{e^{2x^2 + \sin x} + 8x^2} + \ln(x^2 + 1)}{x^4 + 8}$ continue sur \mathbb{R}

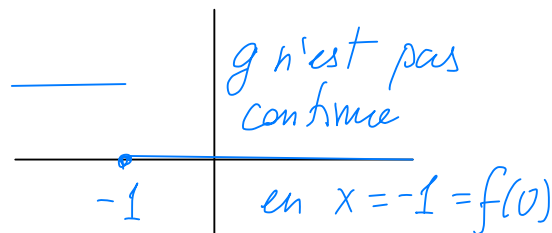
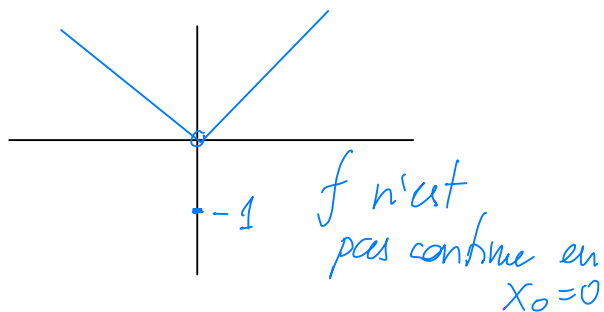
Remarque, $(g \circ f)$ est continue en $x = x_0 \not\Rightarrow$ f continue en x_0
 g continue en $f(x_0)$

Ex. $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \geq -1 \\ 1, & x < -1 \end{cases}$$

$$g(f(x)) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

continue sur \mathbb{R}
continue en $x = 0$



Prolongement par continuité d'une fonction en un point.

Déf. Soit $f: E \rightarrow F$ une fonction telle que $c \notin E$ (f n'est pas définie en $x=c$) et $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \in \mathbb{R}$ existe. Alors la fonction $\hat{f}: E \cup \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\hat{f}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x), & x \in E \\ \lim_{x \rightarrow c} f(x), & x = c. \end{cases}$$

est appelée le **prolongement par continuité** de f au point $x=c$.
Un tel prolongement est unique et la fonction \hat{f} est continue en $x=c$.

Ex 1. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(\frac{1}{x}) = 0$
↘ 0 bornée

\Rightarrow le prolongement par continuité

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \Rightarrow \hat{f} \text{ est continue sur } \mathbb{R}$$

Question 17.

Soit $f :]\frac{2}{3}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\ln(1 + |x - \frac{\pi}{2}|)}{|\cos x|}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(1+t(x))}{t(x)} = 1 \quad t(x) \rightarrow 0 \quad x \rightarrow a$$

Alors f admet le prolongement par continuité en $x_0 = \frac{\pi}{2}$ et

A. $\hat{f}(\frac{\pi}{2}) = 0$

B. $\hat{f}(\frac{\pi}{2}) = 1$

C. f n'admet pas de prolongement en $x_0 = 1$

D. $\hat{f}(\frac{\pi}{2}) = -1$

E. $\hat{f}(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{e}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + |x - \frac{\pi}{2}|)}{|\cos x|} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + |x - \frac{\pi}{2}|)}{|x - \frac{\pi}{2}|} \frac{|x - \frac{\pi}{2}|}{|\cos x|} =$$

$$\cos(x - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \cos(x - \frac{\pi}{2}) \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{=0} - \sin(x - \frac{\pi}{2}) \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{=1} =$$
$$= -\sin(x - \frac{\pi}{2})$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + |x - \frac{\pi}{2}|)}{|x - \frac{\pi}{2}|} \frac{|x - \frac{\pi}{2}|}{|\sin(x - \frac{\pi}{2})|} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{\ln(1 + |x - \frac{\pi}{2}|)}{|x - \frac{\pi}{2}|}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\left| \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\sin(x - \frac{\pi}{2})} \right|}_{\rightarrow 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(t(x))}{t(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{t(x)}{\sin(t(x))}$$

si $\lim_{x \rightarrow a} t(x) = 0$

§4.5. Fonctions continues sur un intervalle

-156-

Déf. Une fonction $f: I \rightarrow F$ où I est un intervalle ouvert non-vide est continue sur I si f est continue en tout point $x \in I$.

$f: [a, b] \rightarrow F$ est continue sur $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$ et continue à gauche en $x = b$ et à droite en $x = a$.

Ex. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x+3} & x \neq -\frac{3}{2} \\ 0 & , x = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow f$ est continue sur $] -\frac{3}{2}, \infty [$
 $] -\infty, -\frac{3}{2} [$

Théorème Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $f: [a, b] \rightarrow F$ une fonction continue sur l'intervalle fermé et borné $[a, b]$. Alors f atteint son infimum et son supremum sur $[a, b]$ ($\Leftrightarrow \exists \max_{[a, b]} f(x)$ et $\exists \min_{[a, b]} f(x)$)

Etapas de démonstration: (1) Soit $m = \inf f(x)$ s'il existe, ou $m = -\infty$

Alors $\exists (c_n) \in [a, b] : \lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n) = m$

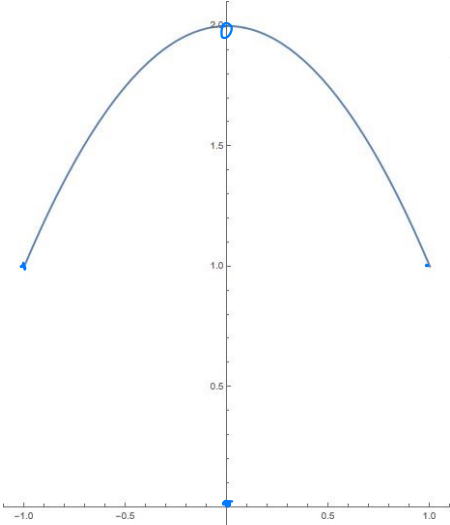
(2) (c_n) est bornée \Rightarrow Par Bolzano-Weierstrass \exists une sous-suite $(c_{n_j}) \subset (c_n)$ convergente.

$\Rightarrow \exists c_0 = \lim_{j \rightarrow \infty} c_{n_j} \in [a, b]$

(3) f est continue $\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{j \rightarrow \infty} f(c_{n_j}) = f(c_0) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n) = m \end{array} \right\} \Rightarrow m \in f([a, b])$
est le minimum de $f(x)$ sur $[a, b]$.

Remarques

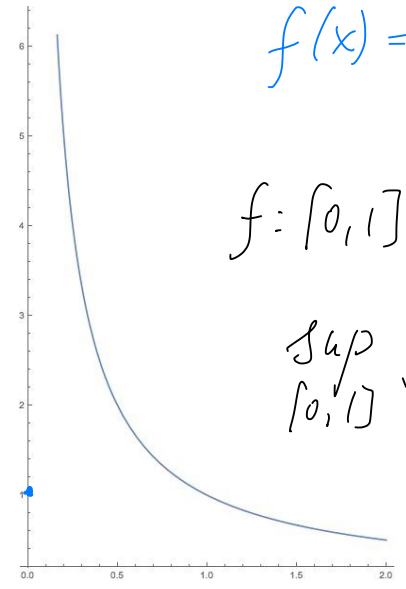
(1) Thm: Une fonction **continue** sur un intervalle fermé borné atteint son inf, son sup.



$$f(x) = \begin{cases} 2-x^2, & x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas continue

$\sup_{[-1,1]} f(x) = 2$, mais la fonction n'atteint pas son sup

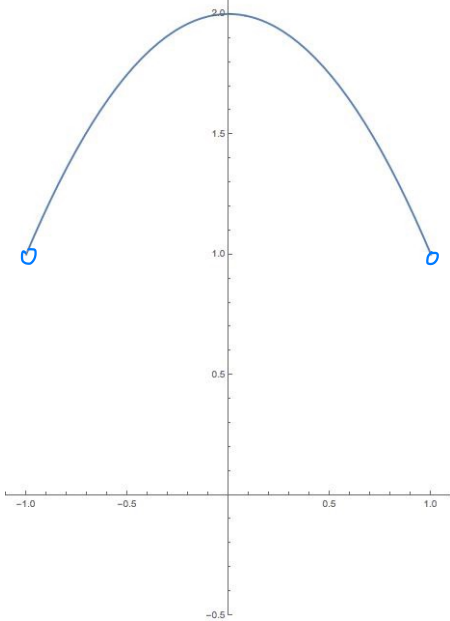


$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in]0,1] \\ 1, & x=0 \end{cases}$$

$f:]0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas continue

$\sup_{]0,1]} f(x)$ n'existe pas

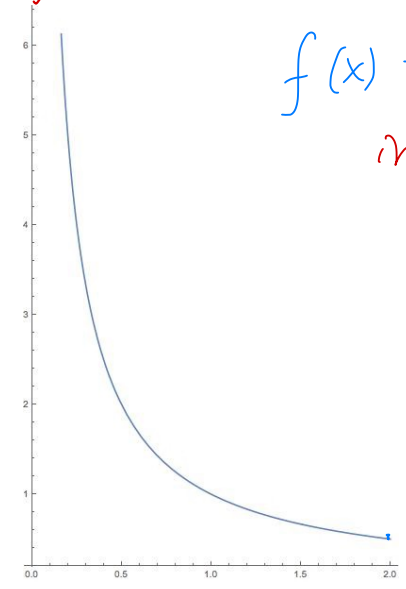
(2) Thm: Une fonction continue sur un intervalle **fermé** borné atteint son sup et inf.



$$f(x) = 2-x^2 :]-1,1[\rightarrow \mathbb{R}$$

intervalle ouvert

$\inf_{]-1,1[} f(x) = 1$, mais mais la fonction n'atteint pas son inf



$$f(x) = \frac{1}{x} :]0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

intervalle semi-ouvert

$\sup_{]0,1]} f(x)$ n'existe pas

Théorème de la valeur intermédiaire (TVI)

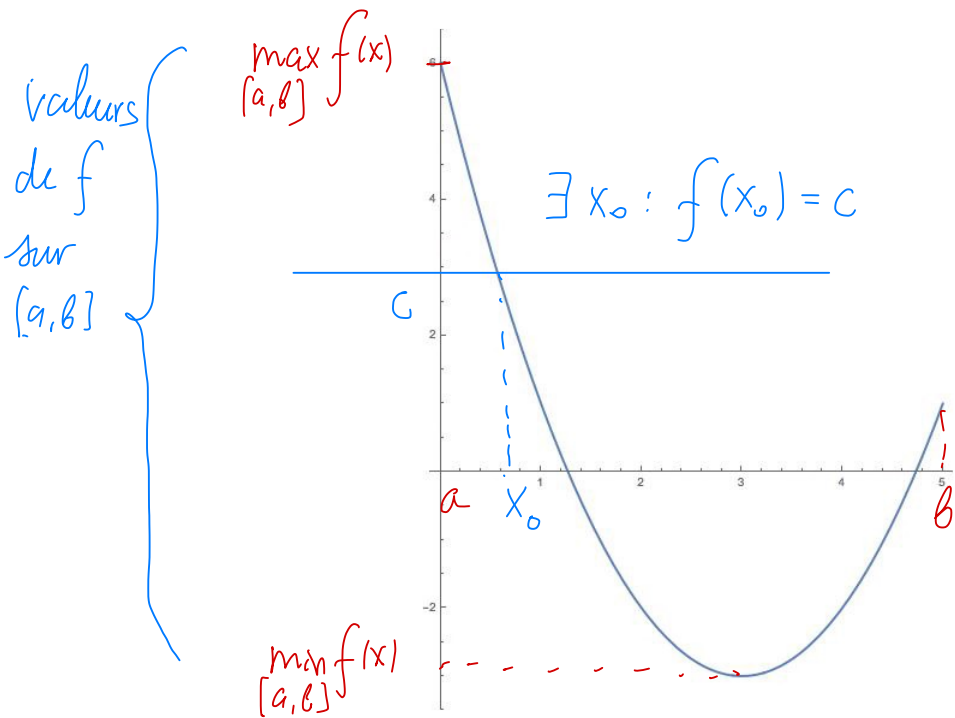
Soit $a < b \in \mathbb{R}$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f atteint son sup, son inf et toute valeur comprise entre les deux.

$$f([a, b]) = \left[\min_{[a, b]} f(x), \max_{[a, b]} f(x) \right] \quad [DZ \text{ § 5.3.22}]$$

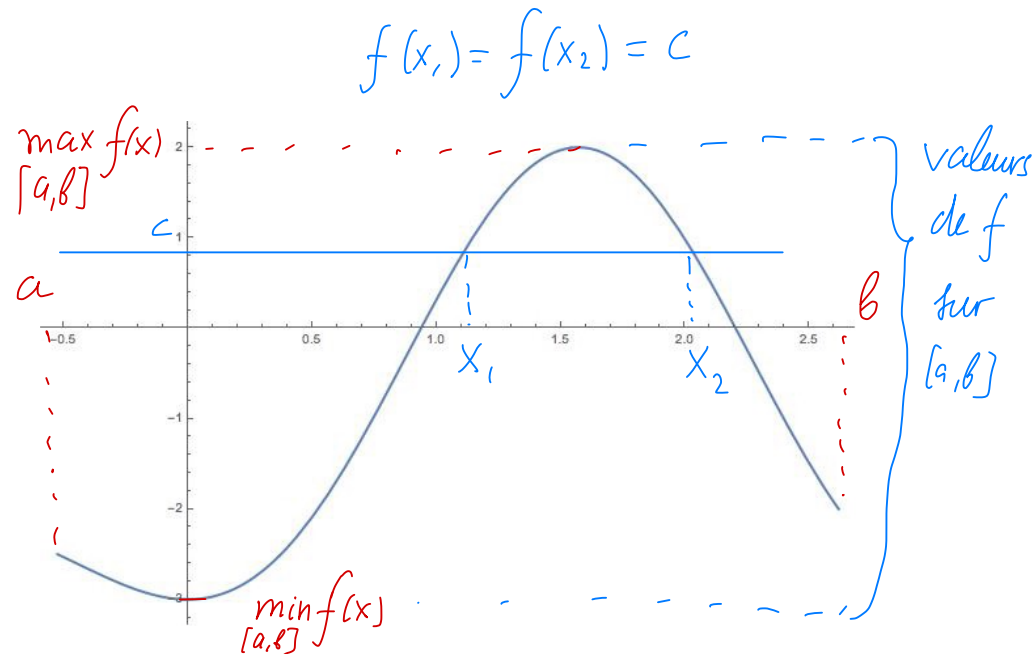
En particulier, f atteint toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$

Thm: $\forall c \in \left[\min_{[a, b]} f(x), \max_{[a, b]} f(x) \right] \exists$ au moins un $x \in [a, b] : f(x) = c$.

Ex 1.



Ex 2.



Corollaire 1. Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

telle que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$: $f(c) = 0$.

Ex 1 Démontrer que l'équation $\sin x + \frac{1}{x-4} = 0$ possède au moins deux solutions sur $[0, \pi]$.

(1) $f(x) = \sin x + \frac{1}{x-4}$ est continue sur $[0, \pi]$, qui est fermé et borné

\Rightarrow Par TVI

$$f(0) = \sin 0 + \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4} < 0$$

$$f(\pi) = \sin \pi + \frac{1}{\pi-4} = \frac{1}{\pi-4} < 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\frac{\pi}{2}-4} = 1 + \frac{1}{\frac{\pi}{2}-4} > 0$$

$> -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow f(0) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 \Rightarrow \exists$ au moins un $x_1 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ t.g. $f(x_1) = 0$

$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot f(\pi) < 0 \Rightarrow \exists$ au moins un $x_2 \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ t.g. $f(x_2) = 0$

$$x_1 \neq x_2$$

$\Rightarrow \exists$ au moins 2 solutions différentes de l'équation

$$\sin x + \frac{1}{x-4} = 0 \text{ sur } [0, \pi].$$

Ex2 $\cos x = \tan x$. Démontrer qu'il existe au moins une solution sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. -160-

$f(x) = \cos x - \tan x$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ fermé borné \Rightarrow PVI

$$f(0) = \cos 0 - \tan 0 = 1 > 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 < 0$$

$\Rightarrow \exists x_0 \in]0, \frac{\pi}{4}[: f(x_0) = 0$.

On peut résoudre cette équation: $\cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \sin x \Leftrightarrow$

$$1 - \sin^2 x = \sin x \Rightarrow \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

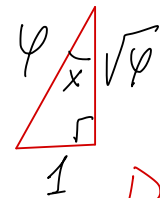
$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ puisque } |\sin x| \leq 1$$

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{-1+5}{4} = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{\varphi} \text{ où } \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ est le nombre d'or!}$$

$$\frac{1}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi} = 1 \Rightarrow \varphi^2 = \varphi + 1$$

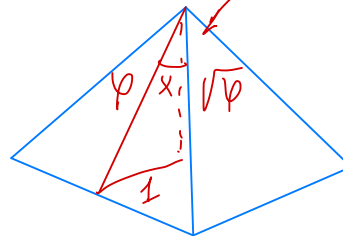
$$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{\varphi} \Rightarrow x \approx 38^\circ$$

Triangle de Kepler



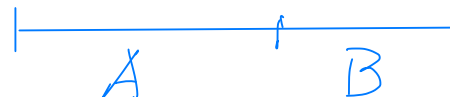
$$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{\varphi}$$

Pyramide de Khéops



Le nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

-161-

Déf  $\frac{A}{B} = \frac{A+B}{A} \Leftrightarrow \frac{A}{B} = \varphi$ le nombre d'or

$$\frac{A}{B} = 1 + \frac{B}{A} \Leftrightarrow \frac{A}{B} = 1 + \frac{1}{\frac{A}{B}} \Leftrightarrow \left(\frac{A}{B}\right)^2 = \left(\frac{A}{B}\right) + 1, \frac{A}{B} > 0 \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Proposition. Soit $f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ la suite de Fibonacci

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi$

Dém: Supposons que la limite existe $\Rightarrow \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n}$

Convergence de la suite $\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\right)$

$\downarrow l = 1 + \frac{1}{l}$

Exercice: (1) $f_n^2 - f_{n-1}f_{n+1} = (-1)^{n+1} \forall n \geq 1$ par récurrence

(2) $\frac{f_n}{f_{n+1}} = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{(-1)^n}{f_n f_{n+1}}$ par récurrence

(3) la série alternée converge par le critère de Leibnitz.

$$\Rightarrow l^2 = l + 1, l > 0$$
$$\Rightarrow l = \varphi$$

La limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi$ implique, entre autres,

-162-

la propriété d'un ananas d'avoir pour le nombre de spirales
gauches et droites deux nombres de Fibonacci consécutifs.

(Plus d'information
suivant le lien
nombre-d-or
sur Moodle,
voir Phyllotaxie).



Dans ce cas #spirales rouges = 13
spirales blanches = 8